Musterlösung **11. Jgst.** **1. Klassenarbeit** **Datum: 09.10.2009**

Klasse: GY GS 09 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Zahlenmengen und Intervalle; Lineare Funktionen; Abstand; Mittelpunkt

---

1.) Aufgaben zu Mengen und Intervallen

a) Erklären Sie, mit welchem Buchstaben die Menge der rationalen Zahlen dargestellt wird und warum dies so ist.

Lösung: Menge Q ist die Menge der rationalen Zahlen und symbolisiert alle Brüche; der Buchstabe Q resultiert aus dem Begriff Quotient (Ergebnis der Division).

b) Geben Sie die Menge in aufzählender Form an:

$$T = \{n \in N \mid n \text{ ist Vielfaches von 2 und } n \leq 10\}$$

Lösung: $T = \{2; 4; 6; 8; 10\}$

c) Geben Sie die Menge in beschreibender Form an:

$$U = \{1; 2; 4; 8; 16; ...; 2048\}$$

Lösung: $T = \{n \in N \mid \text{"die Potenzen von 2 mit den Exponenten von 0 bis 11"}\}$

d) Kennzeichnen Sie die Mengen am Zahlenstrahl und geben Sie diese als Intervalle an:

$A = \{x \in \Re \mid -2 \leq x < 4\}$ $\qquad B = \{x \in \Re \mid x \leq 8\}$

$C = \{x \in \Re \mid x > 6\}$

Lösung: $A = [-2; 4[$ $\quad B =]-\infty; 8]$ $\quad C =]6; \infty[$

e) Stellen Sie die Intervalle in der Mengenschreibweise dar:

$D = [-10; 10[$ $\qquad E =]-\infty; 25[$ $\qquad F = [-3; 12]$

Lösung: $D = \{x \in \Re \mid -10 \leq x < 10\}$ $\qquad E = \{x \in \Re \mid x < 25\}$

$F = \{x \in \Re \mid -3 \leq x \leq 12\}$

f) ***„Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist immer durch 3 teilbar."***

(i) Zeigen Sie an einem Zahlenbeispiel, dass diese Aussage stimmt.

Lösung: $$\frac{1}{3}(1+2+3) \quad = \quad \frac{6}{3} \quad = \quad 2 \quad \Rightarrow \quad \textit{Summe ist Dreierzahl.}$$

(ii) Zeigen Sie nun allgemein, dass diese Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt. Wählen Sie hier für die zweite Ihrer drei Zahlen den Wert n.

Lösung:

$$\textit{Zahl}\,1:(n-1) \quad \textit{Zahl}\,2:n \quad \textit{Zahl}\,3:(n+1)$$

$$\frac{1}{3}(n-1+n+n+1) \quad = \quad \frac{3n}{3} \quad = \quad n \quad \Rightarrow \quad \textit{Summe ist Dreierzahl.}$$

(iii) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass diese Behauptung für die Summe der Quadrate von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nicht gilt.

Lösung:

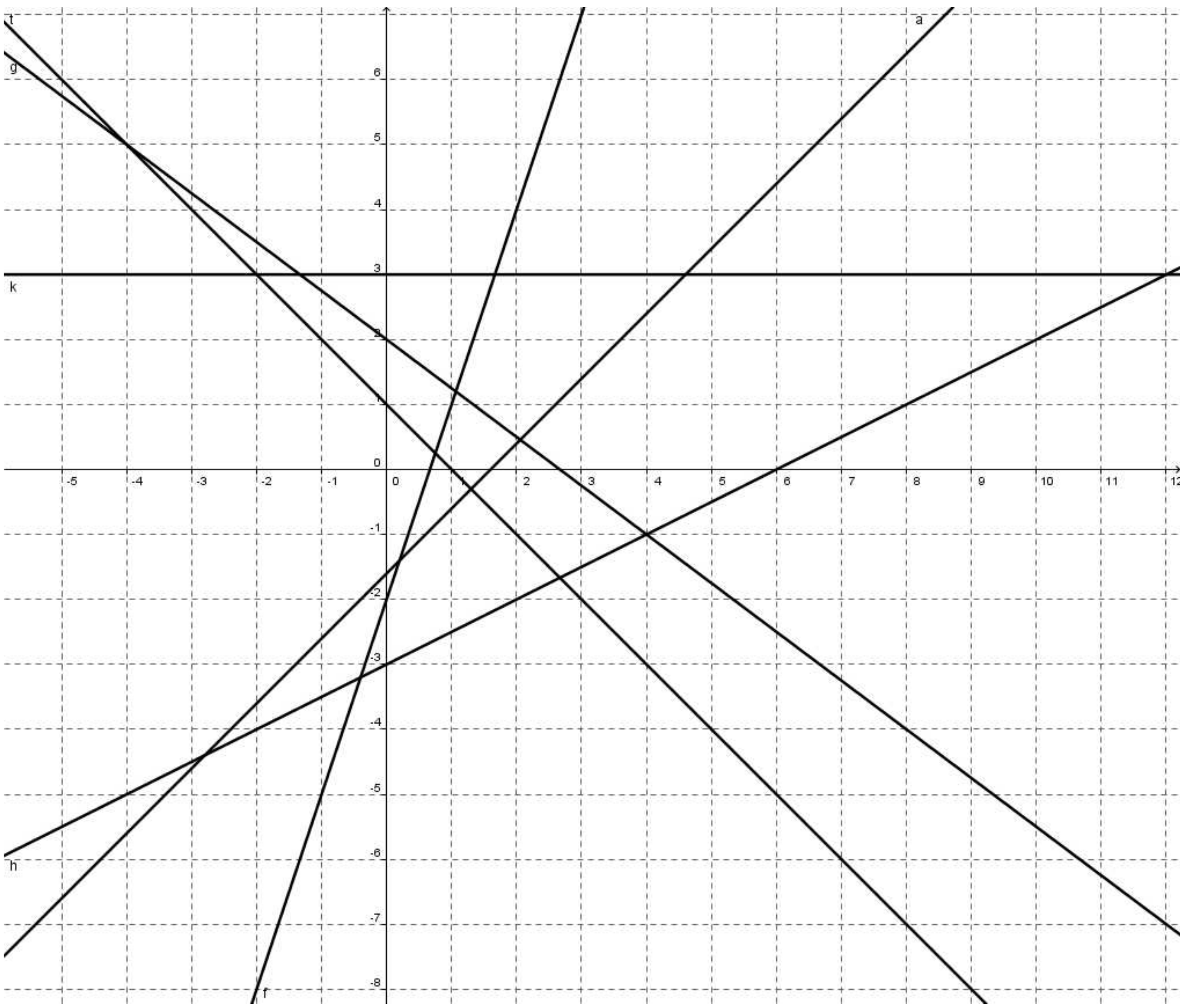
$$\frac{1}{3}\left(1^2+2^2+3^2\right) \quad = \quad \frac{14}{3} \quad [\textit{keine Ganzzahl}] \quad \Rightarrow \quad \textit{Summe ist keine Dreierzahl.}$$

2.) Geraden

Zeichnen Sie folgende Geraden in ein Koordinatensystem:

a)	$f(x) = 3x-2$	b)	$g(x) = -\frac{3}{4}x+2$
c)	$h(x) = \frac{1}{2}x-3$	d)	$t(x) = -x+1$
e)	$k(x) = 3$	f)	$y+2x-6 = -3x+2+6y$

Lösung: $$y+2x-6 \quad = \quad -3x+2+6y \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad x-\frac{8}{5}$$



3.) Berechnungen mit Geraden

Gegeben sind die Punkte A (-2 / 3) und B (6 / -1) und die

Gerade $f(x) = -3x + \frac{4}{5}$

a) Bestimmen Sie die lineare Funktionsvorschrift, auf der die Punkte A und B liegen.

Lösung:

$$m = \frac{(-1)-3}{6-(-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Punkt P(-2 / 3) eingesetzt: $3 = -\frac{1}{2}\cdot(-2)+b \quad \Rightarrow \quad b = 2 \quad \Rightarrow \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

b) Prüfen Sie, ob die Punkte C (-1 / $\frac{19}{5}$) und D (2 / -7) auf der Geraden $f(x)$ liegen.

Lösung:

$$f(-1) = -3\cdot(-1)+\frac{4}{5} = \frac{19}{5} = 3\frac{4}{5} \Rightarrow C\in f(x)$$

$$f(2) = -3\cdot 2+\frac{4}{5} = -\frac{26}{5} = -5\frac{1}{5} \Rightarrow D\notin f(x)$$

c) Ergänzen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte E (-3 / ?) und F (? / 2) , damit gilt: E $\in$ $f(x)$ und F $\in$ $f(x)$.

Lösung:

$$f(-3) = -3\cdot(-3)+\frac{4}{5} = \frac{49}{5} = 9\frac{4}{5} \Rightarrow E\left(-3 \,\middle|\, 9\frac{4}{5}\right)$$

$$2 = -3x+\frac{4}{5} \Rightarrow x = -\frac{2}{5} \Rightarrow F\left(-\frac{2}{5} \,\middle|\, 2\right)$$

d) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die senkrecht auf f(x) steht und durch den Punkt B verläuft?

Lösung:

$$m_{senkrecht} = \frac{1}{3}$$

Punkt P(6 / -1) eingesetzt: $-1=\frac{1}{3}\cdot 6+b \Rightarrow b=-3 \Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}x-3$

e) Nennen Sie die Funktionsvorschrift der zu $f(x)$ parallelen Geraden durch den Punkt A

Lösung:

Punkt P(-2 / 3) eingesetzt: $3=-3\cdot(-2)+b \Rightarrow b=-3 \Rightarrow g(x)=-3x-3$

f) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten A und B.

Lösung: $e = \sqrt{\left[(-2)-6\right]^2+\left[3-(-1)\right]^2} = \sqrt{80}$

4.) Heron-Verfahren

Berechnen Sie den Ausdruck $\sqrt{7}$ nach dem Heronverfahren.
Bitte führen Sie hierbei 2 Näherungen durch.

__Lösung:__

Startwert: $x_1 = 3$ Näherung 1: $x_2 = \frac{1}{2}\left(3+\frac{7}{3}\right) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

Näherung 2: $x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+\frac{7}{\frac{8}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+\frac{21}{8}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{64+63}{24} = \frac{127}{48}$

5.) Anwendungen zu linearen Funktionen

Eine Brauerei rechnet für die Auslieferung ihrer Getränkekisten mit dem eigenen Verkaufsfahrzeug 0,80 € pro Kiste bei monatlichen Fixkosten von 840,00 €.

a) Erstellen Sie einen linearen Term für die Kosten der Auslieferung von x Kisten.

__Lösung:__ $f(x) = 0{,}8\,x+840$

b) Welche Kosten entstehen bei einer Auslieferung von 2.500 Kisten?

__Lösung:__ $f(2.500) = 0{,}8\cdot 2.500+840 \Rightarrow f(2.500) = 2.840\,[€]$

Ein Logistikunternehmen bietet die Auslieferung für 1,20 € pro Kiste an.

c) Wie lautet dieser lineare Term?

__Lösung:__ $g(x) = 1{,}2x$

d) Für welche Auslieferungszahl entstehen bei beiden Angeboten die gleichen Kosten? Ermitteln Sie dabei auch die Höhe der Kosten.

__Lösung:__

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 0{,}8\,x+840 = 1{,}2\,x \Rightarrow x = 2.100$$
$$g(2.100) = 1{,}2\cdot 2.100 = 2.520\,[€]$$

Die Brauerei liefert nun weiterhin mit dem eigenen Verkaufsfahrzeug aus. Unterbreiten Sie der Brauerei ein Angebot, das bei einem Absatz von 4.000 Kisten eine Einsparung von 600,00 € bringt.

e) Wie hoch sind dann Ihre Auslieferungskosten pro Kiste?

Lösung:

$$\textit{Kosten für } 4.000 \textit{ Kisten}: \quad f(4.000) = 0{,}8 \cdot 4.000 + 840 = 4.040$$

$$\textit{Einsparung von } 600\,€: \quad 4.040 - 600 = 3.440$$

$$\textit{Angebot pro Kiste}: \quad \frac{3.440}{4.000} = 0{,}86 \Rightarrow h(x) = 0{,}86\,x$$

6.) Die Seilbahn

In Budapest gibt es am Stadtrand eine Sesselliftbahn (= Libegö)
Der Sessellift erinnert eher an einen Skilift und überwindet einen Höhenunterscheid von ca. 262 m, führt in die Budaer Berge und endet am Fuß des János-Berg, mit 526 m, dem höchsten Punkt von Budapest.
Der Ausblick von hier ist unvergesslich.
Die Fahrt dauert bei einer Geschwindigkeit von 12 km/h etwa 15 min.

a) Auf welcher Höhe befindet sich der Startpunkt?

Lösung: $526 - 262 = 264\,[m]$

b) Wie lang ist die Fahrtstrecke in m?

Lösung: $$\textit{Streckenlänge} = 12\left[\frac{km}{h}\right] \cdot \frac{15}{60}[h] = 3[km] = 3.000[m]$$

c) Erklären Sie die **Arbeitsschritte**, die bei den hier vorgegebenen Daten zur Berechnung der Steigung der Sesselliftbahn notwendig wären.

Lösung: (anstelle des ersten Schritts wäre auch Pythagoras möglich)

* Sinus (Steigungswinkel) bestimmen mit den Werten Hypotenuse (3.000 m) und Gegenkathete (262 m) => dann α Winkel ausrechnen

* Tangenswert von Winkel α ausrechnen => Steigung m

$$\sin(\alpha) = \frac{262}{3.000} = 0{,}0873 \Rightarrow \alpha = 5{,}01 \Rightarrow \tan(5{,}01) = 0{,}08766 = m$$

d) *ZUSATZFRAGE: In welchem Land liegt Budapest?*

Lösung: *Ungarn*

7.) Steigung und Gefälle

a) Erklären Sie das nebenstehende Schild:

Welche Bedeutung hat es in praktischer Hinsicht und in mathematischer Interpretation?

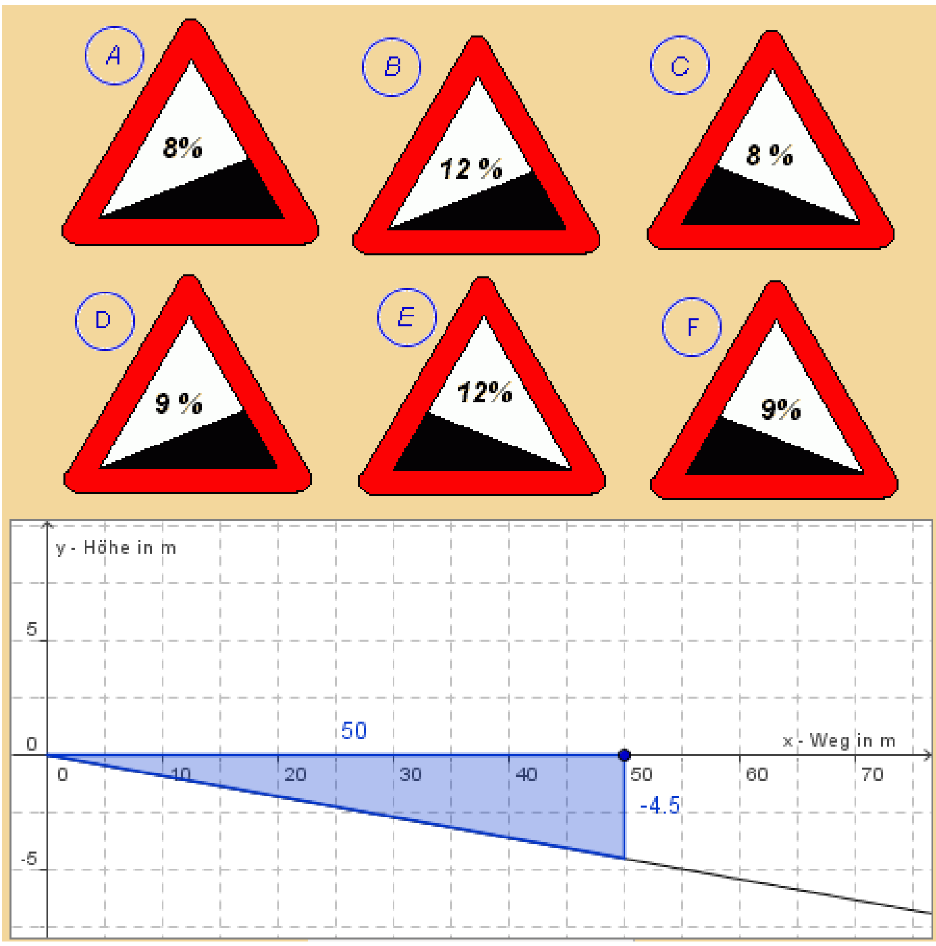
Lösung: Auf eine Länge von 100 m wird gleichzeitig eine Höhe von 5 m erreicht, dies ist vergleichbar einem Steigungswert von $m = 5[\%] = \frac{5}{100}$

Mathematisch entspricht dies dem Tangenswert des Winkels α :

$$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{5}{100} \Rightarrow \alpha = 2{,}86° \quad [Steigungswinkel]$$

b) Im untenstehenden Bild sind sechs Verkehrsschilder gezeichnet, die eine gefährliche Steigung oder ein gefährliches Gefälle ankündigen. Darunter befindet sich eine Zeichnung, in der ein möglicher Straßenverlauf nachgebildet ist.

Ordnen Sie den Straßenverlauf einem der sechs Verkehrsschilder zu und **begründen** Sie Ihre Entscheidung.



Lösung: Verkehrsschild F, da im Schaubild bei 50 m der Höhenunterschied

(– 4,5) m beträgt; auf 100 m hochgerechnet wären dies – 9 m;

$$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha) = \frac{-9}{100} = (-)9[\%]$$

c) Wie viel Grad Steigung hätte eine Straße mit dem Verkehrsschild 100 % ?

Lösung: Da auf eine Länge von 100 m gleichzeitig eine Höhe von 100 m erreicht wird, ist dies vergleichbar einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck. Dadurch entsteht im Punkt A der **Steigungswinkel 45 °**, was einem Tangenswert von 1 entspricht. Da der Tangens durch $\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$ definiert ist und in diesem besonderen Fall $Gegenkathete = Ankathete$ gilt, folgt ein Seitenverhältnis von 1 : 1 bzw. ein Prozentwert von 100.