Musterlösung **11. Jgst.** **4. Test** **Datum: 08.02.2010**

Klasse: GY GS 09 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Differenzenquotient

1.) Polynomdivision

Führen Sie folgende beiden Polynomdivisionen durch:

a) $\left(4x^4 - 7x^3 + 5x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right) : (4x - 3) =$

Lösung:

$$x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad \text{Rest: } \frac{9}{4}$$

```
(4x^4  - 7x^3  + 5x^2  - 5/2x  +   3) : (4x - 3)  =
 4x^4  - 3x^3
 ———————————————————
     - 4x^3  + 5x^2  - 5/2x  +   3
     - 4x^3  + 3x^2
     —————————————————
           2x^2  - 5/2x  +   3
           2x^2  - 3/2x
           —————————————
                - x  +   3
                - x  + 3/4
                ——————————
                    9/4
```

Wie bei der schriftlichen Division von Zahlen zieht man auch bei der Polynomdivision vom Dividenden nach und nach passende Vielfache des Divisors ab, bis am Ende möglichst kein Rest mehr bleibt. Dazu wird in jedem Schritt derjenige Summand des Restes eliminiert, bei dem x in der höchsten Potenz steht.
Die Summanden des Quotienten erhält man daher durch Division dieses Summanden der jeweiligen Reste durch den Summanden des Divisors mit der höchsten Potenz von x. In diesem Beispiel ist das 4x.
Betrachte den Dividenden 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 5/2x + 3 als ersten "Rest".
Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist 4x^4.
Da 4x^4/(4x) = x^3, ist der erste Summand des Quotienten x^3.
Berechne x^3·(4x - 3) = 4x^4 - 3x^3 und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: -4x^3 + 5x^2 - 5/2x + 3
Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist -4x^3.

Da $-4x^3/(4x) = -x^2$, ist der nächste Summand des Quotienten $-x^2$.
Berechne $-x^2 \cdot (4x - 3) = -4x^3 + 3x^2$ und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: $2x^2 - 5/2x + 3$
Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist $2x^2$.
Da $2x^2/(4x) = 1/2x$, ist der nächste Summand des Quotienten $1/2x$.
Berechne $1/2x \cdot (4x - 3) = 2x^2 - 3/2x$ und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: $-x + 3$
Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist $-x$.
Da $-x/(4x) = -1/4$, ist der nächste Summand des Quotienten $-1/4$.
Berechne $-1/4 \cdot (4x - 3) = -x + \frac{3}{4}$ und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: $9/4$
Der Rest hat einen kleineren Polynomgrad ($g=0$) als der Divisor ($g=1$) -> Abbruch
Der Quotient wird ergänzt durch den Summanden "Rest/Divisor".

b) $\left(2x^8-6x^5+4x^3-5x\right):\left(\frac{1}{2}x^4-1\right) \quad =$

Lösung:

$$4x^4-12x+8 \quad \text{Rest: } 4x^3-17x+8$$

```
(2x^8  - 6x^5         + 4x^3  -  5x     ) : (1/2x^4 - 1)  =
 2x^8         - 4x^4
 ———————————————————
      - 6x^5  + 4x^4  + 4x^3  -  5x
      - 6x^5                 + 12x
      —————————————————
              4x^4  + 4x^3  - 17x
              4x^4               - 8
              —————————————
                     4x^3  - 17x  + 8
```

Wie bei der schriftlichen Division von Zahlen zieht man auch bei der Polynomdivision vom Dividenden nach und nach passende Vielfache des Divisors ab, bis am Ende möglichst kein Rest mehr bleibt. Dazu wird in jedem Schritt derjenige Summand des Restes eliminiert, bei dem x in der höchsten Potenz steht.
Die Summanden des Quotienten erhält man daher durch Division dieses Summanden der jeweiligen Reste durch den Summanden des Divisors mit der höchsten Potenz von x. In diesem Beispiel ist das 1/2x^4.
Betrachte den Dividenden 2x^8 - 6x^5 + 4x^3 - 5x als ersten "Rest".
Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist 2x^8.
Da 2x^8/(1/2x^4) = 4x^4, ist der erste Summand des Quotienten 4x^4.
Berechne 4x^4·(1/2x^4 - 1) = 2x^8 - 4x^4 und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: -6x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 5x
Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist -6x^5.
Da -6x^5/(1/2x^4) = -12x, ist der nächste Summand des Quotienten -12x.
Berechne -12x·(1/2x^4 - 1) = -6x^5 + 12x und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: 4x^4 + 4x^3 - 17x
Der Summand dieses Restes mit der höchsten Potenz von x ist 4x^4.
Da 4x^4/(1/2x^4) = 8, ist der nächste Summand des Quotienten 8.
Berechne 8·(1/2x^4 - 1) = 4x^4 – 8 und subtrahiere dies vom letzten Rest.
-> neuer Rest: 4x^3 - 17x + 8
Der Rest hat einen kleineren Polynomgrad (g=3) als der Divisor (g=4) -> Abbruch
Der Quotient wird ergänzt durch den Summanden "Rest/Divisor".

2.) Untersuchung von gebrochen-rationalen Funktionen

Untersuchen Sie die Funktionen nach folgenden Kriterien:
Nullstellen – Polstellen – Lücke – Asymptote – Sy.

Sollte eine Lücke vorliegen, dann ermitteln Sie auch den Grenzwert an der Stelle x_0.

a) $$f(x) = \frac{3x+6}{5x-10}$$

Lösung:

Nullstelle: x = - 2 Polstelle: x = 2 S_y (0 / - 0,6)

Asymptote: $a(x) = \frac{3}{5} = 0,6$ (Zählergrad = Nennergrad)

b) $$f(x) = \frac{x^3-4x}{2x^2-6x+4}$$

Lösung:

Nullstelle: $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ Polstelle: x = 1 S_y (0 / 0)

Asymptote: $a(x) = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad \text{Rest:}\, 3x-6$ (Polynomdivision)

$$f(x) = \frac{x^3-4x}{2x^2-6x+4} = \frac{x(x+2)(x-2)}{2(x-1)(x-2)}$$

$$f^*(x) = \frac{x(x+2)}{2(x-1)} \xrightarrow[x\to 2]{\lim} 4$$ => Lücke: L(2 / 4)

c) $$f(x) = \frac{x^2+x-6}{3x^2-3}$$

Lösung:

Nullstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ Polstelle: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ S_y (0 / 2)

Asymptote: $a(x) = \frac{1}{3}$ (Zählergrad = Nennergrad)

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{3x^2-3} = \frac{(x-2)(x+3)}{3(x-1)(x+1)}$$

3.) Differenzenquotient

a) Berechnen Sie den Differenzenquotient bei x = 4 bei der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$ und bestimmen Sie den Wert der Steigung.

x	6	5	4,1	4,01
$f(x)=\frac{1}{2}x^3-x$	102	57,5	30,3605	28,2306005
m_{Sek}	$\frac{102-28}{6-4}=37$	$\frac{57,5-28}{5-4}=29,5$	$23,605$	$23,06005$

x	2	3	3,9	3,99
$f(x)=\frac{1}{2}x^3-x$	2	10,5	25,7595	27,770599
m_{Sek}	$\frac{2-28}{2-4}=13$	$\frac{10,5-28}{3-4}=17,5$	$22,405$	$22,94005$

Der Wert der Differenzenquotienten strebt gegen den Wert 23.

Es gilt: $$\lim_{x\to 4} m_{Sek}(x) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-28}{x-4} \to 23$$

b) Was wird mit dem Differenzenquotient berechnet?

Lösung: Mit dem Differenzenquotient wird die Sekantensteigung zwischen zwei Punkten auf der Funktion berechnet. Durch die Verschiebung eines Punktes in Richtung des zweiten Punktes wird aus der Sekante im Grenzfall eine Tangente. Damit entsteht die Steigung der Funktion in der unendlich kleinen Umgebung eines Punktes.