Musterlösung **12. Jgst.** **2. Klassenarbeit** **Datum:**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Thema: **Kurvendiskussion ganzrat. Funktionen; Produkt- und Kettenregel; Steckbriefaufgaben**

1.) Ableitungen

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^3\right)^2$$

Lösung: $$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^3\right)\cdot\left(2x^3 - 6x^2\right)$$

b) $$f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 4}$$

Lösung: $$f'(x) = \frac{\frac{9}{2}x^2 - \frac{8}{5}x}{2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 4}}$$

c) $$f(x) = \left(5x^2 - 4x + 2\right)^3\left(4x^2 + 1\right)$$

Lösung:

$$f'(x) = 3\left(5x^2 - 4x + 2\right)^2\left(10x - 4\right)\left(4x^2 + 1\right) + \left(5x^2 - 4x + 2\right)^3 8x$$

$$f'(x) = \left(5x^2 - 4x + 2\right)^2\left[3\left(10x - 4\right)\left(4x^2 + 1\right) + \left(5x^2 - 4x + 2\right)8x\right]$$

d) $$f(x) = \left(-x^4 + 3x^2\right)^{n+2}$$

Lösung: $$f(x) = (n+2)\left(-x^4 + 3x^2\right)^{n+1}\cdot\left(-4x^3 + 6x\right)$$

2.) Ableitung und Steigung

Welche Steigungen hat die Funktion

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\left(x^2 - 2x\right)$$

an den Stellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$

Lösung:

$$f'(x) = \left(x^2 - 2x\right)\left(x^2 - 2x\right) + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)(2x - 2)$$

$$f'(x) = \left(x^2 - 2x\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)(2x - 2)$$

$$f'(2) = (4-4)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)(4-2) = 0 - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$$

$$f'(-1) = 3^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot(-4) = \frac{43}{3} = 14\frac{1}{3}$$

3.) Tangentenermittlung

Berechnen Sie die Tangente der Funktion an der Stelle x = 2:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)^3$$

Lösung:

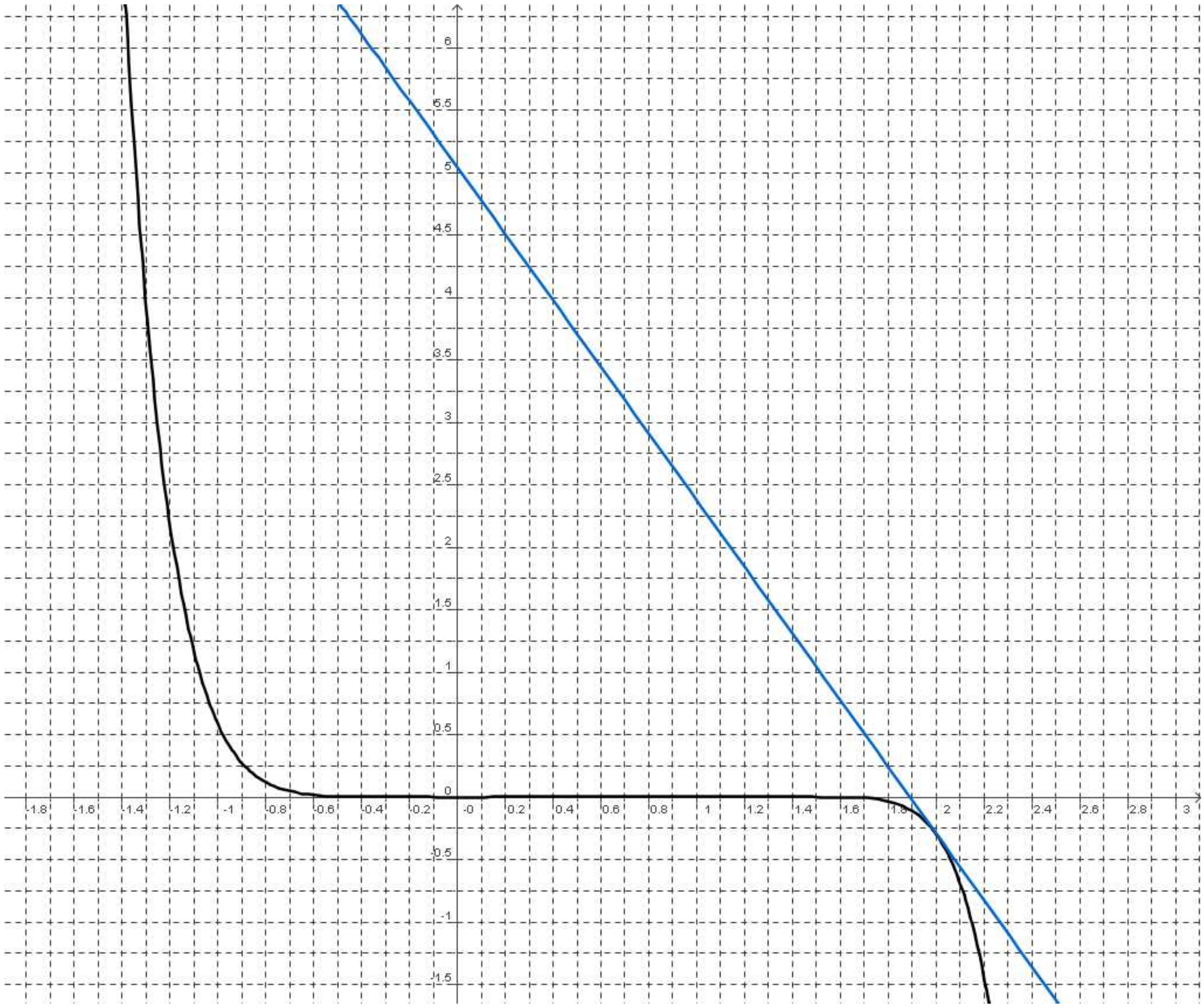
$$f(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)^3 \Rightarrow f(2) = -\frac{8}{27}$$

$$f'(x) = 3\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)^2\left(-x^2 + x\right) \Rightarrow f'(2) = -\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{8}{27} = \left(-\frac{8}{3}\right)\cdot 2 + b \Rightarrow b = \frac{136}{27}$$

$$\Rightarrow t(x) = \left(-\frac{8}{3}\right)x + \frac{136}{27}$$

Graph der Funktion und der Tangente:



4.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Führen Sie bei folgender Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$$

eine Untersuchung nach folgenden Kriterien durch:

a) Symmetrie

b) Nullstellen

c) Extremwerte

d) Wendepunkte

e) Skizze der Funktion

f) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Wendetangente.

Lösung:

Symmetrie: Keine Symmetrie

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 - (-x)^2 = -\frac{1}{4}x^3 - x^2 \neq -f(x) \quad und \quad \neq f(x)$$

Nullstellen:

$$f(x) = x^2\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,(doppelt) \wedge x_2 = 4$$

Extremwerte:

$$f'(x) = x\left(\frac{3}{4}x - 2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{8}{3}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 2$$

$$\Rightarrow f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow Max(0 \mid 0)$$

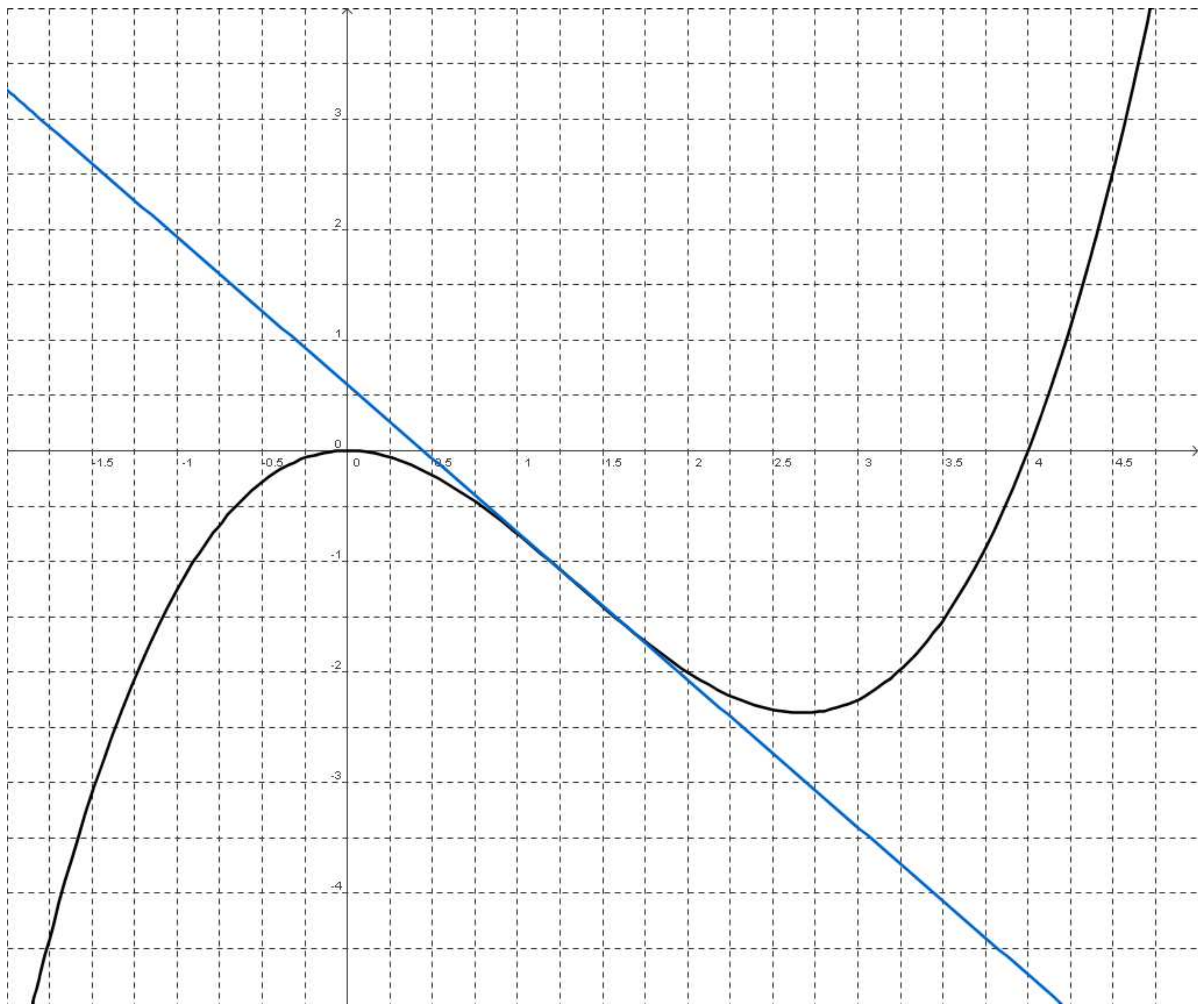
$$\Rightarrow f''\left(\frac{8}{3}\right) = 2 > 0 \Rightarrow Min\left(\frac{8}{3} \,\middle|\, -\frac{64}{27}\right)$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow f'''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow W\left(\frac{4}{3} \,\middle|\, -\frac{32}{27}\right)$$

Skizze der Funktion:



Wendetangente:

$$\text{Steigung im Wendepunkt:}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Tangente:}$$

$$-\frac{32}{27} = -\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right) + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{16}{27}$$

$$t(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{27}$$

5.) Ermitteln einer ganzrationalen Funktion aufgrund gegebener Eigenschaften I

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades besitzt im Punkt $P(1 \mid 3)$ die Steigung 3, im Punkt $Q(0 \mid 4)$ liegt ein Wendepunkt.

Wie lautet die Funktionsgleichung?

<u>Lösung:</u>

$i)\quad a+b+c+d=3$ Punkt P eingesetzt in f(x)

$ii)\quad 3a+2b+c=3$ Steigung m = 3 in P eingesetzt in f '(x)

$iii)\quad 2b=0$ Wendepunkt in Q eingesetzt in f "(x)

$iv)\quad d=4$ Punkt Q eingesetzt in f(x)

$$\left.\begin{array}{ll} i) & a+c=-1 \\ ii) & 3a+c=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{ii)-i)} 2a=4 \quad \Rightarrow \quad a=2 \quad \Rightarrow \quad c=-3$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=2x^3-3x+4$$

6.) Ermitteln einer ganzrationalen Funktion aufgrund gegebener Eigenschaften II

Der Graph einer ganzratioanalen Funktion fünften Grades ist punktsymmetrisch und hat im Punkt $P(1 \mid 8)$ einen Sattelpunkt.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung?

<u>Lösung:</u>

$P(1 \mid 8)$

$i)\quad b=d=f=0$ Punktsymmetrie

$ii)\quad a+c+e=8$ Punkt P eingesetzt in f(x)

$iii)\quad 5a+3c+e=0$ Wendepunkt in P hat als Sattelpunkt die Steigung 0: einsetzen in f ' (x).

$iv)\quad 20a+6c=0$ Punkt P als Wendestelle eingesetzt in f"(x)

$$\left.\begin{array}{l} ii \quad a+c+e=8 \\ iii)\ 5a+3c+e=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{iii)-ii)} \quad 4a+2c=-8 \quad \xrightarrow{\cdot 3} \quad iii) \quad 12a+6c=-24$$

$$\xrightarrow{iv)-iii)} \quad 8a=24 \quad \Rightarrow \quad a=3 \quad \Rightarrow \quad c=-10 \quad \Rightarrow \quad e=15$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=3x^5-10x^3+15x$$

7.) Ansätze zur Berechnung einer ganzrationalen Funktion aufgrund gegebener Eigenschaften III

Bestimmen Sie lediglich die Ansätze aufgrund folgender Bedingungen:

Eine ganzrationale Funktion vierten Grades ...

a) ... ist achsensymmetrisch und hat die Nullstelle in x = 2.
b) ... hat ein Maximum in x = 4.
c) ... hat an der Wendestelle bei x = - 2 die Steigung 0,5.
d) ... besitzt den Punkt $P(-1 \mid 2)$.

Lösung:

a) $$f(2) \quad = \quad a\cdot(2)^4+b\cdot(2)^2+c \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad 16a+4b+c \quad = \quad 0$$

b) $$f'(4) \quad = \quad 4a\cdot(4)^3+3b\cdot(4)^2+2c\cdot 4+d \quad = \quad 0$$
$$\Rightarrow \quad 256a+48b+8c+d \quad = \quad 0$$

c)

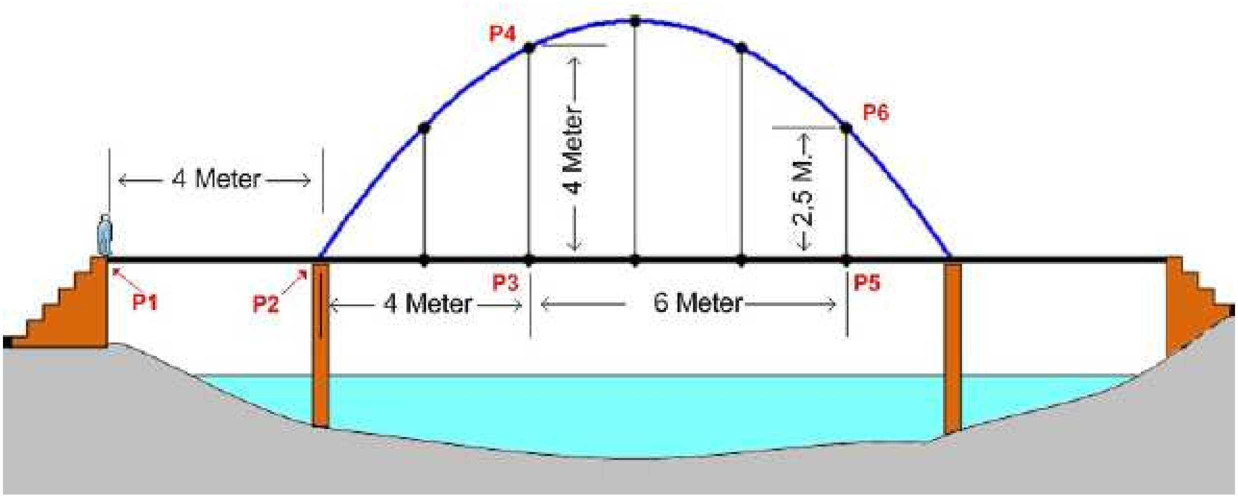
$$i) \quad f''(-2) \quad = \quad 12a\cdot(-2)^2+6b\cdot(-2)+2c \quad = \quad 0$$
$$\Rightarrow \quad 48a-12b+2c \quad = \quad 0$$

$$ii) \quad f'(-2) \quad = \quad 4a\cdot(-2)^3+3b\cdot(-2)^2+2c\cdot(-2)+d \quad = \quad 0,5$$
$$\Rightarrow \quad -32a+12b-4c+d \quad = \quad 0,5$$

d) $$f(-1)=a\cdot(-1)^4+b\cdot(-1)^3+c\cdot(-1)^2+d\cdot(-1)+e \quad = \quad 2$$
$$\Rightarrow \quad a-b+c-d+e \quad = \quad 2$$

8.) **Parabeln zweiter Ordnung in der Realität**

Eine Fußgängerbrücke wird von einem parabelförmigen Brückenbogen getragen.



a) Wie lang ist die gesamt Fußgängerbrücke?

Lösung: **Die Teilabschnitte müssen addiert werden: 4 + 4 + 6 + 2 + 4 = 20**

b) Berechnen Sie die Gleichung des Brückenbogens anhand der Punkte **P2**, **P4** **und P6** und **wählen Sie die Lage des Koordinatensystem geschickt!**

Lösung:

$$P_2(0 \mid 0); P_4(4 \mid 4) \quad und \quad P_6(10 \mid 2{,}5) \quad mit \quad f(x) = ax^2+bx+c$$

$$I.)\quad c=0 \qquad II.)\quad 16a+4b=4 \qquad III.)\quad 100a+10b=2{,}5$$

$$\xrightarrow{5\cdot II-2\cdot III} -120a = 15 \Rightarrow a = -\frac{15}{120} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x$$