Musterlösung	**11. Jgst.**	**2. Klassenarbeit**	**Datum: 10.01.2008**
	Klasse: HBF	**Fach: Mathematik**	

Themen: Ganz- und Gebr.-rat. Funktionen; Horner-Schema; Polynomdivision

1.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Gegeben sei folgende reelle Funktion:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$$

a) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten und begründen Sie.
b) Berechnen Sie die Funktionswerte für x = - 2 und x = 3
c) Berechnen Sie die Nullstellen.
d) Wie lautet der Schnittpunkt mit der y-Achse?

Lösung:

a) keine Symmetrie, weil gerade und ungerade Hochzahlen vorliegen.

$$f(-x) = (-x)^3 - 5(-x)^2 + 7(-x) - 3$$

$$f(-x) = -x^3 - 5x^2 - 7x - 3 \neq f(x)\, und \neq - f(x)$$

b) Horner-Schema

	f(x) =	1,00 x³	1,00 x²	-10,00 x	8,00
x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	1,00	-10,00	8,00	
-2		-2,00	2,00	16,000	
	1,00	-1,00	-8,00	24,000	f(x0)
x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	1,00	-10,00	8,00	
3		3,00	12,00	6,00	
	1,00	4,00	2,00	14,000	f(x0)

c) Nullstellen:

Schritt 1: Horner-Schema mit x = 1:

	f(x) =	1,00 x³	1,00 x²	-10,00 x	8,00
x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	1,00	-10,00	8,00	
1		1,00	2,00	-8,000	
	1,00	2,00	-8,00	0,000	f(x0)

Schritt 2: Lösung des quadratischen Restterms:

$$x_{2/3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -4 \wedge x_3 = 2$$

$$Ergebnis: \quad f(x) = (x-1)(x+4)(x-2)$$

d) $S_y(0 \mid 8)$

2.) Ganzrationale Funktion vom Grad n = 3

Ermitteln Sie die Ansätze für den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion vom Grad n = 3, deren Graph durch die gegebenen Punkte verläuft:

$$A(-1 \mid 2), B(1 \mid 6), C(4 \mid 14) \quad und \quad D(0 \mid 3)$$

Anmerkung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Lösung:

$$\begin{aligned} I.) &\quad -a+b-c+d = 2 \\ II.) &\quad a+b+c+d = 6 \\ III.) &\quad 64a+16b+4c+d = 14 \\ IV.) &\quad 0a+0b+0c+d = 3 \end{aligned}$$

6.) Gebrochen-rationale Funktionen konstruieren

Erstellen Sie eine gebrochen-rationale Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) Polstelle mit VZW bei x = 1 und Nullstelle bei x = -3.

Lösung: $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$

b) Polstelle mit VZW bei x = -4, Nullstelle bei x = -1,
Lücke bei x = 2 und Asymptote mit a(x) = 3

Lösung: $f(x) = \dfrac{3(x+1)(x-2)}{(x+4)(x-2)}$

3.) Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} I.) & a+b+c+d=0 \\ II.) & -8a+4b-2c+d=-45 \\ III.) & 8a+4b+2c+d=7 \\ IV.) & 0a+0b+0c+d=-3 \end{array}$$

Lösung:

$$\left.\begin{array}{ll} I.) & a+b+c+d=0 \\ II.) & -8a+4b-2c+d=-45 \\ III.) & 8a+4b+2c+d=7 \\ IV.) & 0a+0b+0c+d=-3 \end{array}\right\} \xrightarrow{d=-3} \begin{array}{ll} I.) & a+b+c=3 \\ II.) & -8a+4b-2c=-42 \\ III.) & 8a+4b+2c=10 \end{array}$$

$$\xrightarrow{II.)+III.)} 8b=-32 \quad \Rightarrow \quad b=-4$$

$$\xrightarrow{b=-4} \left.\begin{array}{ll} I.) & a+c=7 \\ II.) & -8a-2c=-26 \\ III.) & 8a+2c=26 \end{array}\right\} \xrightarrow{III.)-2\cdot I.)} 6a=12 \quad \Rightarrow \quad a=2 \quad \Rightarrow \quad c=5$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=2x^3-4x^2+5x-3$$

4.) Polynomdivision

Führen Sie bei den beiden Funktionen eine Polynomdivision durch:

a) $$g(x)=\frac{4x^3+2x^2-4x-6}{x-3}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l} (4x^3+2x^2-4x-6):(x-3) = 4x^2+14x+38+\dfrac{108}{x-3} \\ \underline{-(4x^3-12x^2)} \\ \qquad 14x^2-4x \\ \qquad \underline{-(14x^2-42x)} \\ \qquad\qquad 38x-6 \\ \qquad\qquad \underline{-(38x-114)} \\ \qquad\qquad\qquad 108 \end{array}$$

b) $$g(x)=\frac{x^7-2x^5+4x^3-x^2+6x}{x^2+1}$$

Lösung:

$$\left(x^7-2x^5+4x^3-x^2+6x\right):\left(x^2+1\right) \quad = \quad x^5-3x^3+7x-1-\frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{l}
-\underline{\left(x^7+\ x^5\right)} \\
\quad -3x^5+4x^3 \\
\quad -\underline{\left(-3x^5-3x^3\right)} \\
\qquad 7x^3-x^2+6x \\
\qquad -\underline{\left(7x^3 \qquad +7x\right)} \\
\qquad\quad -x^2-\ x \\
\qquad\quad -\underline{\left(-x^2 \qquad -1\right)} \\
\qquad\qquad -x-1
\end{array}$$

5.) Untersuchung gebrochen-rationaler Funktionen

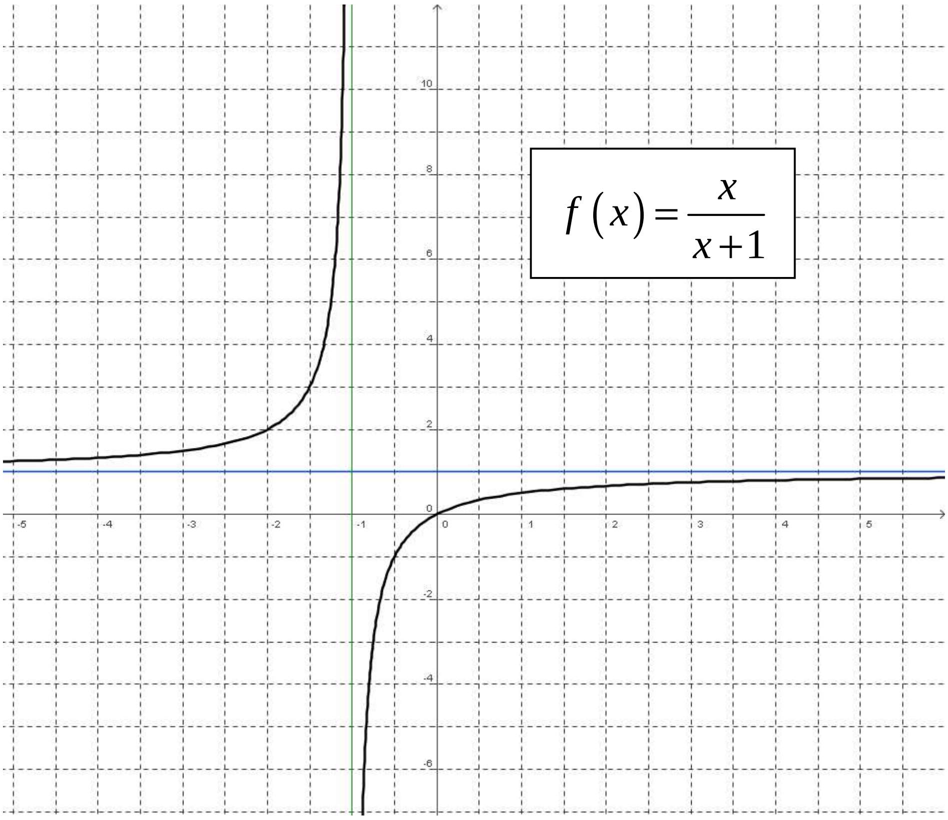
a) Untersuchen Sie die vier Funktionen hinsichtlich
=> Asymptote, => Polstellen, Lücken, Nullstellen und
=> Schnittpunkt mit der y-Achse

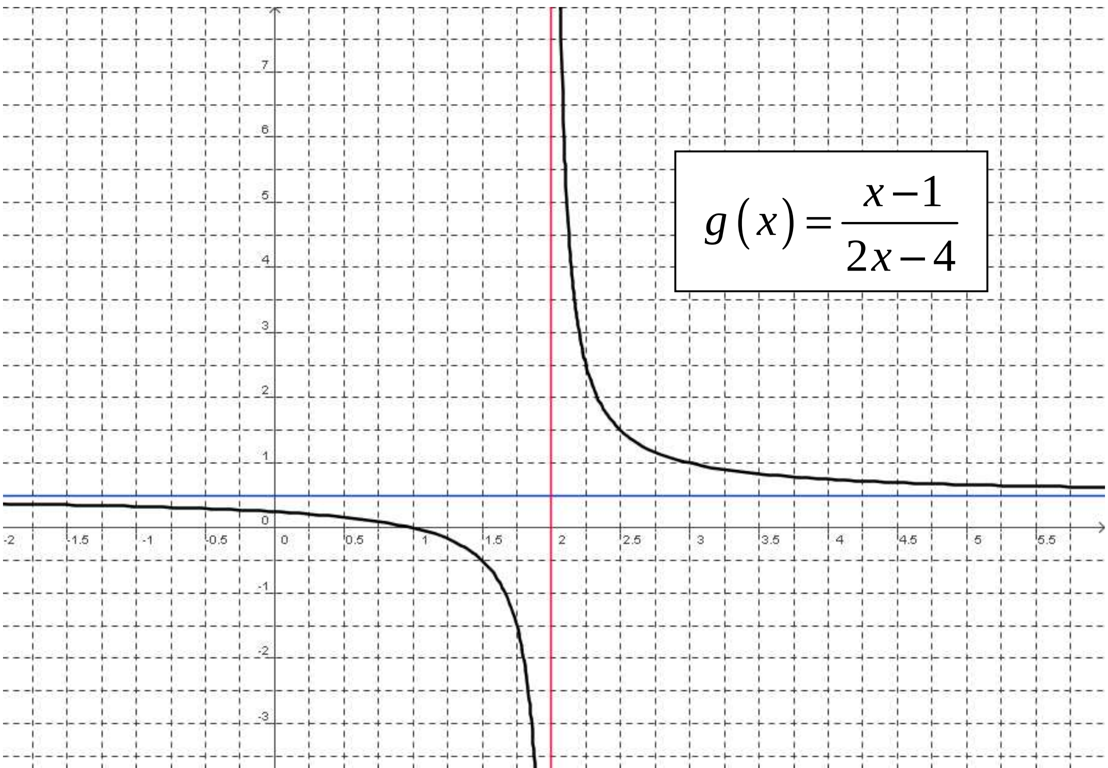
Lösung:

	$f(x)=\frac{x}{x+1}$	$g(x)=\frac{x-1}{2x-4}$	$h(x)=\frac{x^2-4}{x-3}$
Nullstelle(n)	**x = 0**	**x = 1**	**x = 2 und x = - 2**
Polstelle(n)	**x = - 1**	**x = 2**	**x = 3**
S_y	$(0 \mid 0)$	$(0 \mid 0{,}25)$	$\left(0 \,\middle|\, \frac{4}{3}\right)$
Asymptote	**a(x) = 1**	**a(x) = 0,5**	**a(x) = x+3**

$t(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$	**Nullstelle(n): x = - 1** **Lücke(n): x = 2**	**Polstelle(n): x = - 2** **Asymptote: a(x) = 1** $S_y(0 \mid 0{,}5)$

b) Fertigen Sie je eine Skizze der Funktionen f(x) und g(x) mit Ihren Ergebnissen.





Eine Gerade geht durch den Ursprung und den Punkt $P(4 \mid -2)$

c) Berechnen Sie die Geradengleichung.

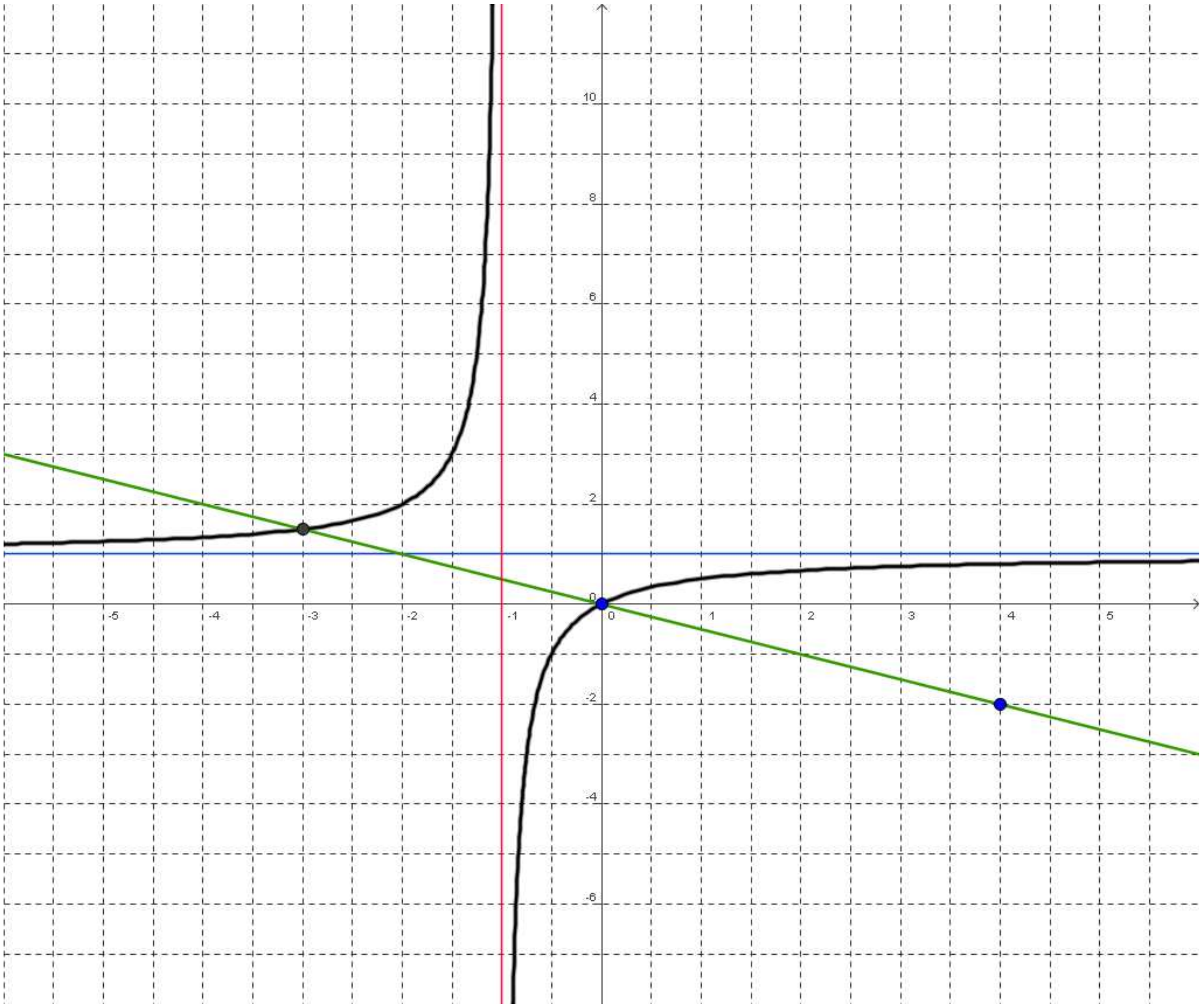
Lösung: $m = \dfrac{-2-0}{4-0} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow d(x) = -\dfrac{1}{2}x$

d) In welchen beiden Punkten schneidet die gesuchte Gerade die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$?

$$Gleichsetzen: \Rightarrow d(x) = f(x)$$

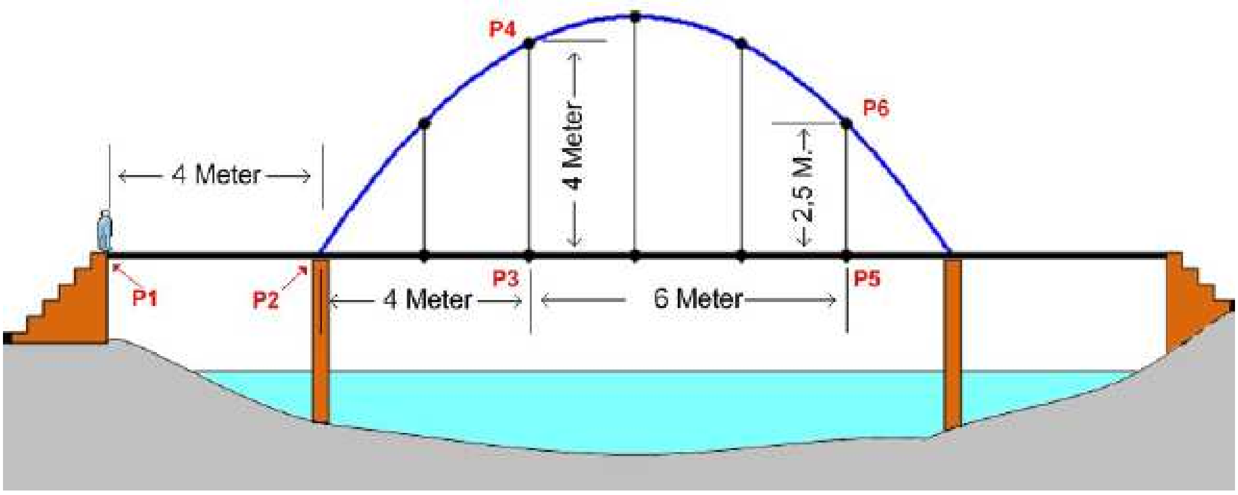
Lösung: $-\dfrac{1}{2}x = \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow -x^2 - x = 2x \Rightarrow x(-x-3) = 0$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = -3 \Rightarrow S_1(0 \mid 0) \wedge S_2\left(-3 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right)$$



7.) Parabeln zweiter Ordnung in der Realität

Eine Fußgängerbrücke wird von einem parabelförmigen Brückenbogen getragen.



a) Wie lang ist die gesamt Fußgängerbrücke?

Lösung: **Die Teilabschnitte müssen addiert werden: 4 + 4 + 6 + 2 + 4 = 20**

b) Berechnen Sie die Gleichung des Brückenbogens anhand der Punkte **P2**, **P4** und P6 und **wählen Sie die Lage des Koordinatensystem geschickt!**

Lösung:

$$P_2(0 \mid 0); P_4(4 \mid 4) \quad und \quad P_6(10 \mid 2{,}5) \quad mit \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$I.) \quad c = 0 \qquad II.) \quad 16a + 4b = 4 \qquad III.) \quad 100a + 10b = 2{,}5$$

$$\xrightarrow{5 \cdot II - 2 \cdot III} \quad -120a = 15 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{15}{120} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$$

8.) Bestimmen einer Funktionsgleichung höheren Grades

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion mit

a) $a_3 = -2 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -7$

Lösung: $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + x - 7$

b) $a_6 = a_4 = 3 \quad a_5 = 2 \quad a_2 = 1 \quad a_1 = a_0 = 2$

Lösung: $f(x) = 3x^6 + 2x^5 + 3x^4 + x^2 + 2x + 2$

Zusatzaufgabe:

9.) Brücken in der Realität

Der Durchgang unter der Brücke entspricht nahezu der Funktionsgleichung

$$f(x) = -0{,}16x^2 + 1{,}6x$$

a) Bestimmen Sie die Höhe und die Breite des Durchgangs.

Lösung:

$$f(x) = -0{,}16\left(x^2 - 10x\right) = -0{,}16\left[\left(x^2 - 10x + 5^2\right) - 5^2\right] = -0{,}16\left(x-5\right)^2 + 4$$

$$S(5 \mid 4)$$

=> Breite: 10 m und Höhe: 4 m

b) Wie breit dürfte ein Boot maximal sein, wenn seine Reling (=Schiffs-geländer) 2 m über dem Wasser läge?

Lösung:

$$Ansatz: \quad f(x) = -0{,}16x^2 + 1{,}6x = 2$$

$$\Rightarrow \quad -0{,}16x^2 + 1{,}6x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-1{,}6 \pm \sqrt{2{,}56 - 1{,}28}}{-0{,}32} = \frac{-1{,}6 \pm 1{,}13}{-0{,}32}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1{,}46 \quad \wedge \quad x_2 = 8{,}53 \quad \Rightarrow \quad Breite = 8{,}53 - 1{,}46 = 7{,}07\,[m]$$