Musterlösung **12. Jgst.** **2. Klassenarbeit** **Datum: 08.12.2008**

Klasse: HBFFach: Mathematik

Thema: Kurvendiskussion diverser Funktionen; Bestimmung ganzrat. Funktionen

---

1.) Steigung einer Funktion

Berechnen Sie die Steigung der Funktion f(x) im Punkt P:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x \qquad P(3 \mid y)$

Lösung: $f'(x) = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow f'(3) = \frac{2}{3} \cdot 3 - 2 = 0 = m$

b) $f(x) = 2x - \frac{1}{x} \qquad P(x \mid 1)$

Anmerkung: 2 Lösungen für x ermitteln und dann die Steigungen berechnen

Lösung: Zuerst müssen die x-Werte berechnet werden:

$$1 = 2x - \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = 2 + \frac{1}{1} = 3 \quad und \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 6$$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x} \qquad P(4 \mid y)$

Lösung: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

2.) **Tangentenermittlung**

Berechnen Sie die Tangente der Funktion f(x) an den Graphen unter den gegebenen Bedingungen:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 \qquad Tangente\ in\ x = 2$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{4}\cdot 8 - \frac{3}{8}\cdot 4 = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{3}{2} = m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot 2 + b \Rightarrow b = -\frac{5}{2} \Rightarrow t(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

3.) **Untersuchung diverser Funktion I**

Bestimmen Sie Hoch- und Tiefpunkte bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 15$

Lösung:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-108}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = 1$$

$$\Rightarrow f''(3) = 6\cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow Min(3 \mid f(3)) = Min(3 \mid -15)$$

$$\Rightarrow f''(1) = 6\cdot 1 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow Max(1 \mid f(1)) = Min(1 \mid -11)$$

b) $f(x) = \sqrt{x}\cdot(x-1)^2$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{x}\cdot(x-1)^2 = x^{0,5}\cdot\left(x^2-2x+1\right) = x^{2,5}-2x^{1,5}+x^{0,5}$$

$$f'(x) = 2,5x^{1,5}-3x^{0,5}+0,5x^{-0,5} \xrightarrow{\cdot x^{0,5}} 2,5x^2-3x+0,5 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{9-5}}{5} = \frac{3\pm 2}{5} \Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = 0,2$$

$$f''(x) = 3,75x^{0,5}-1,5x^{-0,5}-0,25x^{-1,5}$$

$$\Rightarrow f''(1) = 2>0 \Rightarrow Min(1\mid 0)$$

$$\Rightarrow f''(0,2) = -2\sqrt{5}<0 \Rightarrow Min(0,2\mid 0,286)$$

4.) Untersuchung diverser Funktion II

Bestimmen Sie Wendepunkte bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4-x^3+x$

Lösung:

$$f''(x) = 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2$$

$$\Rightarrow f'''(0) = 6\cdot 0-6 \neq 0 \Rightarrow W_1(0\mid 0)$$

$$\Rightarrow f'''(2) = 6\cdot 2-6 \neq 0 \Rightarrow W_2(2\mid -2)$$

b) $f(x) = \sqrt{x}\cdot(x-1)^2$

Lösung:

$$f''(x) = 3,75x^{0,5}-1,5x^{-0,5}-0,25x^{-1,5}$$

$$\xrightarrow{\cdot x^{1,5}} 3,75x^2-1,5x-0,25 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1,5\pm\sqrt{2,25+3,75}}{7,5} = \frac{1,5\pm\sqrt{6}}{7,5}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0,52 \wedge x_2 = -0,13$$

$$\Rightarrow W(0,52\mid 0,16)$$

$\Rightarrow$ Der zweite x-Wert ist nicht im Definitionsbereich der Funktion.

5.) Existenzbeweis einer Wendestelle

Zeigen Sie, dass jede ganzrationale Funktion 3. Grades **genau eine** *Wendestelle* besitzt.

Bestimmen Sie diese *Wendestelle* allgemein.

Anmerkung: Wendestelle ist nur der x-Wert!

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = 6ax + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{3a}$$

$$\Rightarrow \quad f'''(x) = 6a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{x ist die einzige existierende Wendestelle}$$

6.) Anwendungsaufgabe

Beim Kugelstoßen erzielt ein Schüler die Weite von 12 m. Der Stoß erfolgt unter 45° aus einer Höhe von 1,75 m. Die Flugbahn der Kugel entspricht einer quadratischen Parabel.

Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

Lösung:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$i) \quad f(12) = 0: \quad 144a + 12b + c = 0$$

$$ii) \quad f(0) = 1{,}75: \quad c = 1{,}75$$

$$iii) \quad f'(0) = 1: \quad 2 \cdot a \cdot 0 + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{13{,}75}{144} = -0{,}095 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -0{,}095x^2 + x + 1{,}75$$

7.) Bestimmung einer Funktion aufgrund gegebener Eigenschaften

a) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades besitzt im Punkt P(1 / 3) die Steigung 3 und im Punkt S(0 / 4) liegt ein Wendepunkt.

Wie lautet die Funktionsgleichung?

__**Lösung:**__

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\
f''(x) &= 6ax + 2b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
i) & P(1 \mid 3): & a + b + c + d = 3 \\
ii) & f'(1) = 3: & 3a + 2b + c = 3 \\
iii) & P(0 \mid 4): & d = 4 \\
iv) & f''(0) = 0: & b = 0
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
i) & a + c = -1 \\
ii) & 3a + c = 3
\end{array}\right\} \xrightarrow{ii)-i)} 2a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad c = -3
$$

$$
\Rightarrow \quad f(x) = 2x^3 - 3x + 4
$$

b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 5. Grades ist punktsymmetrisch. Er hat im Ursprung die Tangente mit der Gleichung y = 7x und im Punkt P(1/0) einen Wendepunkt.

Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^5 + cx^3 + ex \\
f'(x) &= 5ax^4 + 3cx^2 + e \\
f''(x) &= 20ax^3 + 6cx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&i) \quad f'(0) = 7: && e = 7 \\
&ii) \quad P(1 \mid 0): && a + c + 7 = 0 \\
&iii) \quad f''(1) = 0: && 20a + 6c = 0
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
ii \quad a + c &= -7 \\
iii)\, 10a + 3c &= 0
\end{aligned}\right\} \xrightarrow{iii) - 3 \cdot ii)} 7a = 21 \quad \Rightarrow \quad a = 3 \quad \Rightarrow \quad c = -10
$$

$$
\Rightarrow \quad f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 7x
$$