Musterlösung	11. Jgst.	4. Test	Datum: 12.05.2009
	Klasse: HBF		Fach: Mathematik

Thema: **Kurvenuntersuchung ganzrat. Funktionen (Symmetrie - Nullstellen – Extrema – Wendepunkte)**

1.) Parameter bei ganzrationalen Funktionen

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + 2x$.

Welchen Wert muss k annehmen, damit die Funktion an der Stelle x = 2 einen Hochpunkt besitzt?

Lösung:

$$f_k'(x) = -\frac{3}{k}x^2 + 2 \xrightarrow{x=2} f_k'(2) = -\frac{3}{k}\cdot 4 + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{-2} -\frac{12}{k} = -2 \Rightarrow k = 6$$

2.) Symmetrie

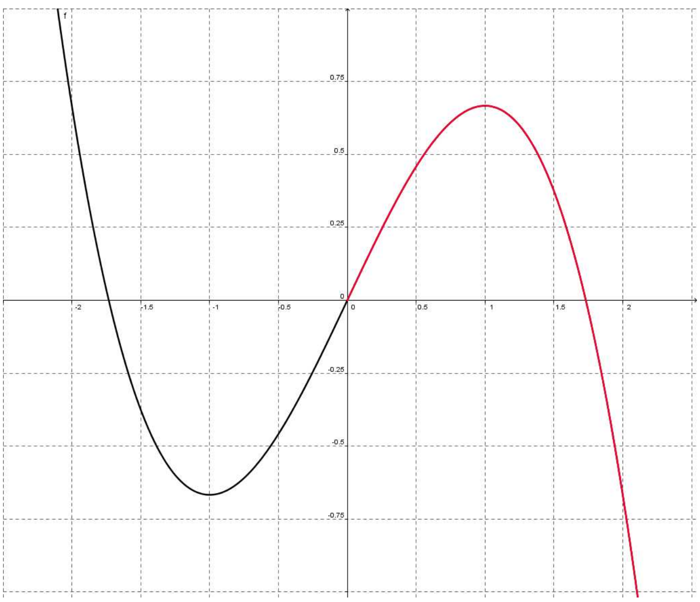
a) Definieren Sie den Begriff „Punktsymmetrie" in mathematisch korrekter Form.

Lösung: $f(-x) = -f(x) \quad oder \quad f(x) = -f(-x)$

b) Durch welche Eigenschaft kann man eine Punktsymmetrie bereits in der Funktionsvorschrift erkennen?

Lösung: **Die Hochzahlen sind ungerade.**

c) Vervollständigen Sie den Graphen so, dass eine Punktsymmetrie vorliegt.



3.) Kurvenuntersuchung

Bestimmen Sie

(i) die Symmetrie,
(ii) die Nullstellen,
(iii) die Extremwerte
(iv) und die Wendepunkte

bei folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - \frac{9}{4}$

Lösung:

(i) keine Symmetrie, da gerade und ungerade Hochzahlen vorliegen.

(ii)

$$Ansatz: \quad \frac{1}{4}x^2 - 2x - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + \frac{9}{4}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \pm \frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = 9 \quad \wedge \quad x_2 = -1$$

(iii)

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f''(4) = \frac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(4 \mid -6{,}25)$$

(iv) $f''(x) = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad keine\ Wendepunkte$

b) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2$

Lösung:

(i) Achsensymmetrie, da nur gerade Hochzahlen vorliegen.

$$Ansatz: \quad -\frac{1}{8}x^4 + x^2 = 0$$

(ii) $x^2\left(-\frac{1}{8}x^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,(doppelt) \wedge |x| = \sqrt{8}$

(iii)

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x = x\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge |x| = 2$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow Min(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow f''(\pm 2) = -4 < 0 \Rightarrow Max(\pm 2 \mid 2) \quad [wegen\ Achsensymmetrie]$$

(iv)

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2 = 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f'''(x) = -3x$$

$$\Rightarrow f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -3\cdot\sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0 \Rightarrow W\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \;\middle|\; \frac{10}{9}\right)$$

Graph zu Aufgabe 3b)