

Thema: Kurvendiskussion ganzrat. Funktionen; Rekonstruktion von Fkt.

1.) Ableitungen

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ Lösung: $f'(x) = x - 2$

b) $f_t(x) = tx^3 - x^2 + 2t$ Lösung: $f_t'(x) = 3tx^2 - 2x$

c) $f(x) = -x^{n+1} + 2x^n$ Lösung: $f'(x) = -(n+1)x^n + 2nx^{n-1}$

2.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Bestimmen Sie die Extremwerte bei folgender Funktion

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1$$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x = x\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 4$$

$$f''(x) = x - 2$$

$$\Rightarrow f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max}(0 | 1)$$

$$\Rightarrow f''(4) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min}\left(4 \left| -\frac{13}{3}\right.\right)$$

3.) Bestimmung bzw. Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen

- a) Die ganzrat. Fkt. $f(x) = ax^2 + bx$ verläuft durch den Punkt P (1 / 1) und hat in $x = -1$ die Steigung m = 10.

Lösung:

$$f(x) = ax^2 + bx \text{ und } f'(x) = 2ax + b$$

$$I.) f(1) = a + b = 1$$

$$II.) f'(-1) = -2a + b = 10$$

$$I.) - II.) 3a = -9 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = -3x^2 + 4x$$

b) Die ganzrat. Fkt. $f(x) = ax^3 - bx^2$ hat einen Wendepunkt W (-2 / 3).

Lösung:

$$f(x) = ax^3 - bx^2 \quad \text{und} \quad f'(x) = 3ax^2 - 2bx \quad \text{und} \quad f''(x) = 6ax - 2b$$

$$I.) \quad f(-2) = -8a - 4b = 3$$

$$II.) \quad f''(-2) = -12a - 2b = 0 \xrightarrow{\cdot(-2)} 24a + 4b = 0$$

$$I.) + II.) \quad 16a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{16} \Rightarrow b = -\frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{8}x^2$$

4.) Bestimmung bzw. Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen

Eine Parabel 3. Ordnung geht durch den Ursprung und hat einen Wendepunkt in W (1 / -2). Die Steigung im Wendepunkt beträgt m = 2.

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{und} \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$I.) \quad f(0) = d = 0$$

$$II.) \quad f(1) = a + b + c = -2$$

$$III.) \quad f''(1) = 6a + 2b = 0 \Rightarrow b = -3a$$

$$IV.) \quad f'(1) = 3a + 2b + c = 2$$

$$III.) \text{ in } II.) \quad \begin{cases} -2a + c = -2 \\ -3a + c = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow c = -10$$

$$\Rightarrow f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 10x$$