

Thema: Newton-Iteration; Extremwertaufgaben

Name:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Punkte:

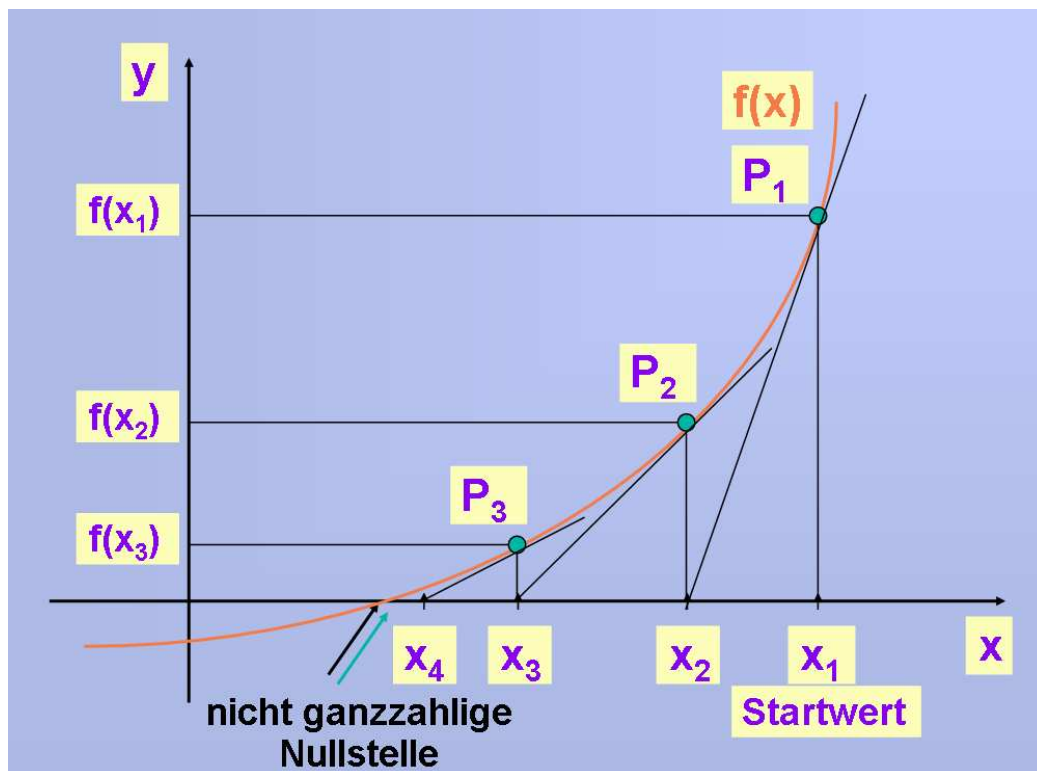
Note:

1.) Newton-Iteration I

Erklären Sie kurz die Herleitung des Newton-Verfahrens und erläutern Sie, wofür es verwendet wird.

Lösung:

Iterationsverfahren zur Bestimmung (nicht - ganzzahliger) Nullstellen von Funktionen



Vorgehensweise:

- (1) Startwert x_0 festlegen
- (2) Folgewerte mit Formel ermitteln:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{mit} \quad f'(x_n) \neq 0$$

2.) Newton-Iteration II

a) Bestimmen Sie die Nullstelle bei folgender Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$$

indem Sie zwei Iterationsschritte mit einem geeigneten Startwert durchführen.

Lösung: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$ $f'(x) = 6x^2 - 10x$

Nullstelle 1: **$x = 2,4142$**

Startwert: $x = 2$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	-3	4	2.75
1	2.75	4.78125	17.875	2.482517482
2	2.4825174825	0.78451422898	12.152183480	2.4179600118
3	2.4179600118	0.04070139427	10.899583594	2.4142257962

Startwert: $x = 3$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	3	10	24	2.583333333
1	2.5833333333	2.1122685185185	14.2083333333	2.4346692733
2	2.4346692733	0.225489278994	11.218994090	2.41457038775
3	2.4145703877	0.003865065489	10.835197067	2.41421367385

Nullstelle 2: **$x = -0,4142$**

Startwert: $x = -1$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	-1	-6	16	-0.625
1	-0.625	-1.44140625	8.59375	-0.4572727
2	-0.457272	-0.23672167	5.827317	-0.4166499
3	-0.4166499	-0.01264453	5.2080829	-0.4142221

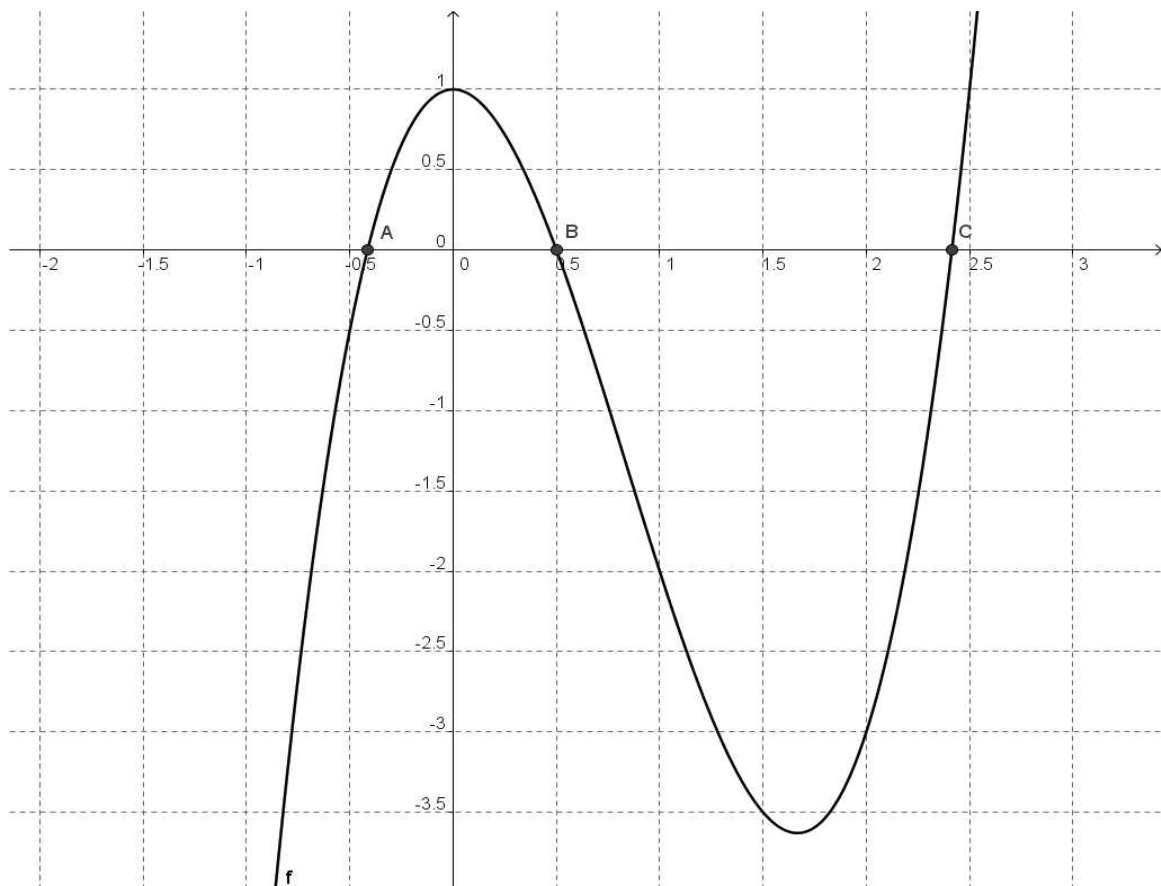
Nullstelle 3: $x = 0,5$

Startwert: $x = 0,25$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	0.25	0.71875	-2.125	0.5882352
1	0.5882352	-0.3230205	-3.8062283	0.5033689
2	0.5033689	-0.01181406	-3.5134078	0.50000

Startwert: $x = 1$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1	-2	-4	0.5
1	0.5	0	-3.5	0.5



- b) Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit Sie das Newton-Verfahren anwenden können?

Lösung:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{mit} \quad f'(x_n) \neq 0$$

3.) Extremwertaufgabe I

Die Summe zweier Zahlen beträgt 60.

Bestimmen Sie die beiden Zahlen, so dass deren Produkt maximal wird.

Lösung:

$$\text{Zielfunktion: } f(a, b) = a \cdot b$$

$$\text{Nebenbedingung: } 60 = a + b \Rightarrow b = 60 - a$$

$$\xrightarrow{b = 60 - a} f(a) = a \cdot (60 - a) = -a^2 + 60a$$

$$\Rightarrow f'(a) = -2a + 60 = 0 \Rightarrow a = 30$$

$$\Rightarrow f''(a) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max} \Rightarrow b = 30$$

$$\Rightarrow f(a, b) = 900$$

4.) Extremwertaufgabe II

Auf einer Wiese soll ein rechteckiges Feld für Weidetiere eingezäunt werden. Das Feld liegt an einem geraden Bach und soll eine Fläche von 5.000 m² haben. Die Seite zum Bach soll nicht eingezäunt werden.

Welche Maße muss das Feld haben, damit möglichst wenig Zaun benötigt wird?

Lösung:

$$\text{Zielfunktion: } U(a, b) = 2a + b$$

$$\text{Nebenbedingung: } 5.000 = a \cdot b \Rightarrow b = \frac{5.000}{a}$$

$$\xrightarrow{b = \frac{5.000}{a}} U(a) = 2a + \frac{5.000}{a}$$

$$\Rightarrow U'(a) = 2 - \frac{5.000}{a^2} = 0 \Rightarrow a = 50$$

$$\Rightarrow U''(a) = \frac{10.000}{a^3} \Rightarrow \frac{10.000}{50^3} > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

$$\Rightarrow b = 100 \Rightarrow U(a, b) = 200 [m]$$