

1.) Ableitungen I

Bilden Sie von jeder Funktion die erste und zweite Ableitung.

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Lösung: $f'(x) = 2ax + b$ und $f''(x) = 2a$

b) $f(x) = (2x-3)(4+3x)$

Lösung:

$$f(x) = (2x-3)(4+3x) = 8x + 6x^2 - 12 - 9x = 6x^2 - x - 12$$

$$f'(x) = 12x - 1 \text{ und } f''(x) = 12$$

c) $f(x) = \frac{2x^4 - 6x^3 + 5x^2}{x^3}$

Lösung:

$$f(x) = \frac{2x^4 - 6x^3 + 5x^2}{x^3} = \frac{2x^4}{x^3} - \frac{6x^3}{x^3} + \frac{5x^2}{x^3}$$

$$f(x) = 2x - 6 + \frac{5}{x} = 2x - 6 + 5x^{-1}$$

$$f'(x) = 2 - 5x^{-2} = 2 - \frac{5}{x^2} \text{ und } f''(x) = 10x^{-3} = \frac{10}{x^3}$$

d) $f(x) = \frac{6x^4 - 8x^2 - 4}{2x}$

Lösung:

$$f(x) = \frac{6x^4 - 8x^2 - 4}{2x} = \frac{6x^4}{2x} - \frac{8x^2}{2x} - \frac{4}{2x} = 3x^3 - 4x - \frac{2}{x} = 3x^3 - 4x - 2x^{-1}$$

$$f'(x) = 9x^2 - 4 + 2x^{-2} = 9x^2 - 4 + \frac{2}{x^2} \text{ und } f''(x) = 18x - 4x^{-3} = 18x - \frac{4}{x^3}$$

$$e) \quad f(x) = \sqrt{x}$$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$f) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^4}$$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}$$

2.) Ableitungen II

Bilden Sie von den beiden Funktionen die **erste** Ableitung.

$$a) \quad f(x) = \frac{x^{n+2} - 3x^n + 2x^{n-4}}{x^n}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^{n+2} - 3x^n + 2x^{n-4}}{x^n} = \frac{x^{n+2}}{x^n} - \frac{3x^n}{x^n} + \frac{2x^{n-4}}{x^n}$$

$$f(x) = x^{n+2-n} - 3x^{n-n} + 2x^{n-4-n} = x^2 - 3 + 2x^{-4}$$

$$f'(x) = 2x - 8x^{-5} = 2x - \frac{8}{x^5}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2(x-1)} \quad \text{Achtung: „Binomgefahr“}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2(x-1)} = \frac{x(x^2 - 2x + 1)}{x^2(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{x(x-1)^2}{x^2(x-1)} = \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 1 - x^{-1}$$

$$f'(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

3.) Extremwerte bei Funktionen

Berechnen Sie die Extremwerte mit Hilfe der Bedingungen 1. und 2. Ableitung

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x$$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 3 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \xrightarrow{x=6} f''(6) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow TP(6 | -9)$$

$$\text{b) } f(x) = -x^3 - 4x^2 + 3x$$

Lösung:

$$f'(x) = -3x^2 - 8x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{Lösungsformel}} x_1 = \frac{1}{3} \text{ und } x_2 = -3$$

$$f''(x) = -6x - 8 \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} f''\left(\frac{1}{3}\right) = -10 < 0 \Rightarrow HP\left(\frac{1}{3} \mid \frac{14}{27}\right)$$

$$f''(x) = -6x - 8 \xrightarrow{x=-3} f''(-3) = 10 > 0 \Rightarrow TP(-3 | -18)$$