Übung zur Kurvendiskussion (Lösungen)

Aufgabe 1: Abschnittsweise bzw. stückweise definierte Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{für } x \geq -1 \\ -4x - 1 & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

a) Untersuchen sie die Funktion f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle x = -1

b) Zeichnen sie den Graphen der Funktion.

c) Welche Steigung hat die Funktion für x = 0 ?

Lösung:

a)

Stetigkeit :

$$\lim_{\substack{x \to -1+h \\ h \to 0}} \left(x^2 - 2x\right) = \lim_{h \to 0} \left[\left(-1+h\right)^2 - 2\left(-1+h\right)\right] = \lim_{h \to 0} \left[1 - 2h + h^2 + 2 - 2h\right]$$

$$\lim_{\substack{x \to -1+h \\ h \to 0}} \left(x^2 - 2x\right) = \lim_{h \to 0} \left[3 - 4h + h^2\right] = 3$$

$$\lim_{\substack{x \to -1-h \\ h \to 0}} \left(-4x - 1\right) = \lim_{h \to 0} \left[-4\left(-1-h\right) - 1\right] = \lim_{h \to 0} \left[4 + h - 1\right] = 3$$

$\Rightarrow$ *stetig*

Differenzierbarkeit :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left[\left(-1+h\right)^2 - 2\left(-1+h\right)\right] - \left[\left(-1\right)^2 - 2 \cdot \left(-1\right)\right]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[1 - 2h + h^2 + 2 - 2h\right] - 3}{h}$$

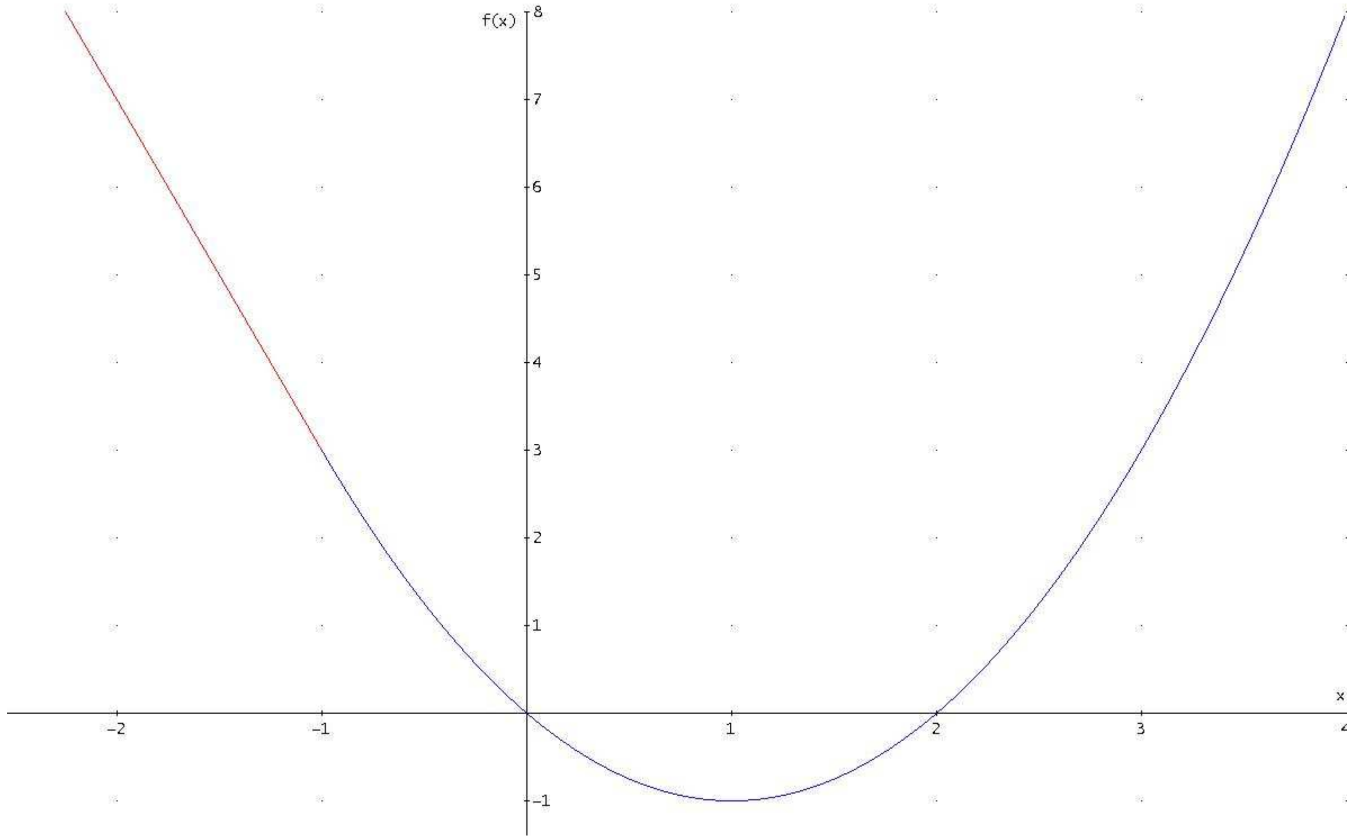
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 - 4h + h^2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h\left(-4 + h\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(-4 + h\right) = \left(-4\right)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left[-4\left(-1-h\right) - 1\right] - \left[-4 \cdot \left(-1\right) - 1\right]}{\left(-1-h\right) - \left(-1\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[4 + 4h - 1\right] - 3}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 + 4h - 3}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h}{-h} = \lim_{h \to 0} \left(-4\right) = \left(-4\right)$$

$\Rightarrow$ *differenzierbar*

b)



c) $f'(x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -2$

Aufgabe 2: Schnittpunkte von Funktionen

Gegeben sind die Funktionen $h(x) = x^2 + 2x$ und $m(x) = x^3 + x + 1$

Untersuchen sie die beiden Kurven auf gemeinsame Punkte.

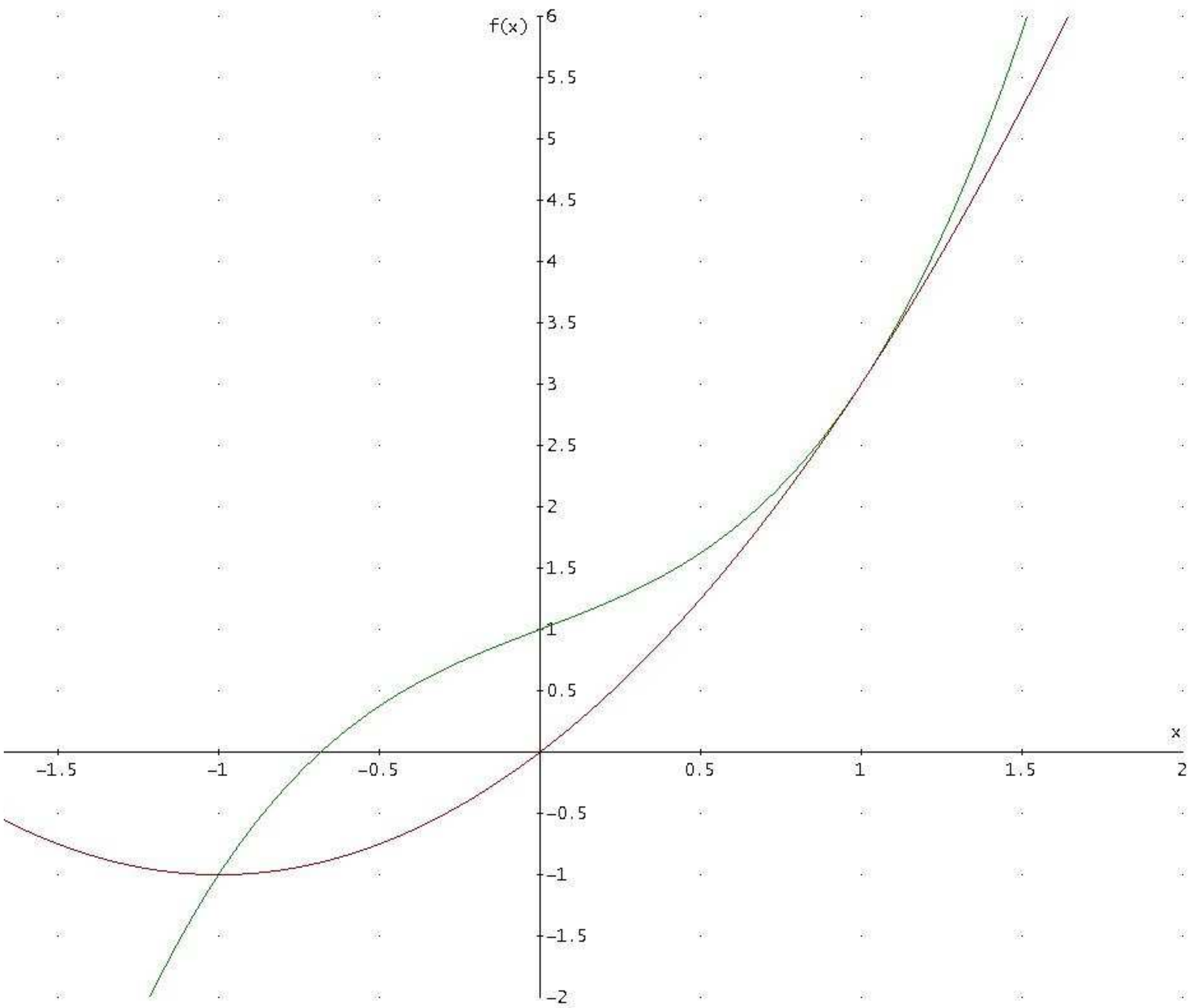
Lösung:

$$h(x) = m(x) \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x = x^3 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \xrightarrow[\text{Polynomdivision}]{\text{Horner-Schema}} \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm 1$$

$$L = \{-1; 1\}$$

vergleiche auch die graphische Veranschaulichung:



Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion $g\left(x\right)=\frac{1}{x}-2x$

a) Bestimmen sie den Definitionsbereich und die Nullstellen der Kurve.

b) Welches Symmetrieverhalten weist die Funktion auf.

Lösung:

$Definitionsbereich: \quad D=\Re\setminus\left\{0\right\}$

$Nullstellen:$

$$\frac{1}{x}-2x=0 \quad \xrightarrow{\cdot x} \quad 1-2x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|x\right|=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$Symmetrieverhalten:$

$$g\left(-x\right) \quad = \quad \frac{1}{\left(-x\right)}-2\left(-x\right) \quad = \quad -\frac{1}{x}+2x \quad = \quad -g\left(x\right) \quad \Rightarrow \quad Punktsymmetrie$$

Aufgabe 4: Kurvendiskussion

Nehmen Sie die Funktion $f\left(x\right)=x^4-2x^3+2x-1$ und untersuchen Sie.

a) Definitionsbereich

b) Symmetrieverhalten

c) Nullstellen

d) Bestimmen sie Art und Lage der Extremwerte.

e) Ermitteln sie die Wendepunkte.

f) Wie lauten die Gleichungen der Wendetangenten?

g) Wie verhält sich die Funktion an den Rändern (± ∞)?

h) Wie lautet die Tangenten- und die Normalengleichung im Punkt P(0/?)

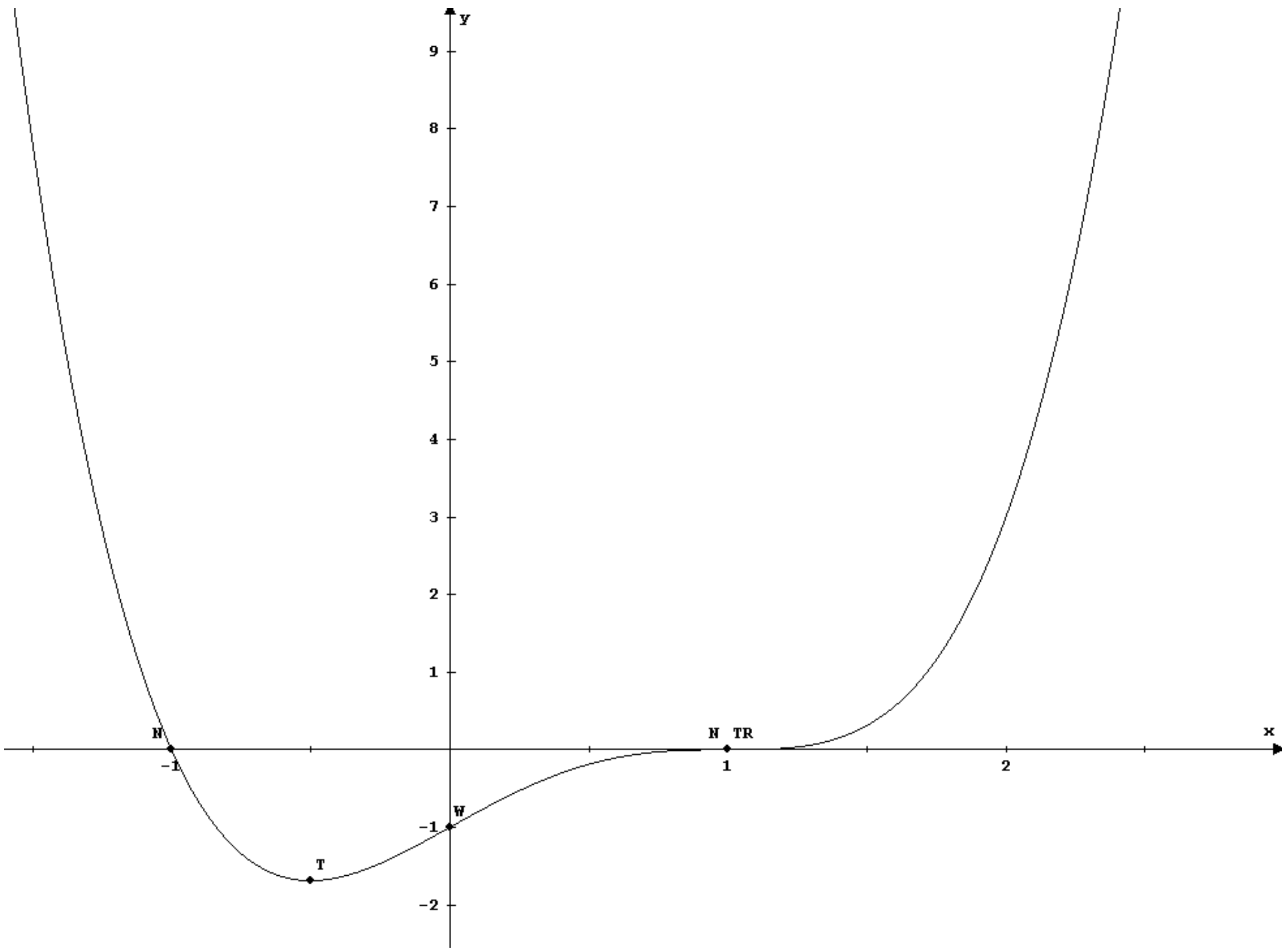
i) Skizzieren aufgrund ihrer Ergebnisse den Graphen der Funktion.

Lösung:

$$Definitionsbereich: \quad D = \Re$$

$$Symmetrieverhalten:$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - 2(-x)^3 + 2(-x) - 1 \\ &= x^4 + 2x^3 - 2x - 1 \quad \neq \quad f(x)\, und - f(x) \quad \Rightarrow \quad keine\ Symmetrie \end{aligned}$$



Schnittpunkte mit der x-Achse	Hoch- und Tiefpunkte	Wendepunkte
N(-1,00| 0,00) m = -8,00	T(-0,50| -1,69) m = 0,00	W(0,00| -1,00) m = 2,00
N(1,00| 0,00) m = 0,00		TR(1,00| 0,00) m = 0,00

Wendetangente $W_1(0 \mid -1) \quad mit\ m = 2$

$$t_{w_1}(x) = 2x - 1$$

Wendetangente $W_2(1 \mid 0) \quad mit\ m = 0$

$$t_{w_2}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - Achse$$

Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \quad = \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(x^4 - 2x^3 + 2x - 1\right) \quad = \quad \infty$$

Tangente und Normale im Punkt $\left(0 \mid ?\right) \quad \Rightarrow \quad \textit{Wendepunkt}$

$\Rightarrow \quad$ Wendetangente $W_1\left(0 \mid -1\right) \quad \textit{mit } m = 2 \quad \Rightarrow \quad t_{w_1}\left(x\right) = 2x - 1$

Wendenormale:

$$m_{Normale} = -\frac{1}{2} \quad \xrightarrow{y-Achsenabschnitt} \quad (-1) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + b \quad \Rightarrow \quad b = (-1)$$

$$\Rightarrow \quad t_{Normale}\left(x\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) x - 1$$

Analoges Vorgehen: $g(x) = {}^1/_5\, x^4 - x^3 + x^2 - x + {}^4/_5$

$k(x) = x^3 + 0{,}5\, x^2 - 4\, x - 2$