Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Beispiel 1: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

(i) Ableitungen: $f'(x)=x^2-1 \qquad f''(x)=2x \qquad f'''(x)=2$

(ii) Definitionsbereich: $D=\Re$

(iii) Symmetrie:

$$f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{3}x^3+x=-f(x)$$

$$\Rightarrow Punktsymmetrie$$

(iv) Nullstellen:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x=0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=\sqrt{3} \quad \wedge \quad x_3=-\sqrt{3}$$

(v) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0)=0 \quad \Rightarrow \quad S_y(0\mid 0)$

(vi) Extremwerte:

$$f'(x)=x^2-1\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \quad \wedge \quad x_2=-1$$

$$f''(1)=2>0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(1 \,\middle|\, -\frac{2}{3}\right)$$

$$f''(-1)=-2<0 \quad \Rightarrow \quad Max\left(-1 \,\middle|\, \frac{2}{3}\right)$$

(vii) Wendepunkte:

$$f''(x)=2x\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

$$f'''=(0)=2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(0\mid 0)$$

(viii) Monotonieintervalle:

$$I_1 = \left]-\infty\,;-1\right[\quad \text{streng monoton steigend}$$
$$I_2 = \left]-1\,;1\right[\quad \text{streng monoton fallend}$$
$$I_3 = \left]1\,;\infty\right[\quad \text{streng monoton steigend}$$

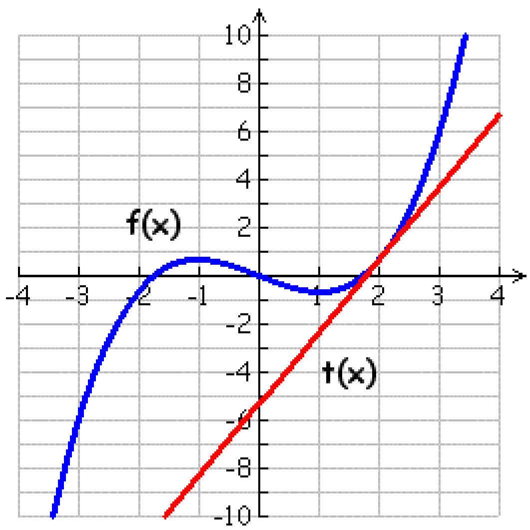
(ix) Tangente in $x_0 = 2$:

$$t(x) = mx + b \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = 3 \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{16}{3}$$
$$\Rightarrow \quad t(x) = 3 \cdot x - \frac{16}{3}$$

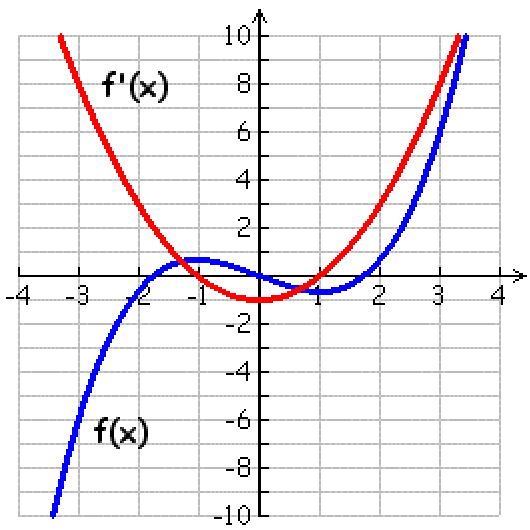
(x) Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \mathit{und} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

(xi) Graph der Funktion und die Tangente:



Funktion und Tangente



Funktion und erste Ableitung