Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Beispiel 2: $g(x) = 3x^4 + 4x^3$

(i) Ableitungen:

$$g'(x) = 12x^3 + 12x^2 \qquad g''(x) = 36x^2 + 24x \qquad g'''(x) = 72x + 24$$

(ii) Definitionsbereich: $D = \Re$

(iii) Symmetrie:

$$g(-x) = 3(-x)^4 + 4(-x)^3 = 3x^4 - 4x^3 \neq -f(x) \; und \neq f(x)$$
$$\Rightarrow keine\ Symmetrie$$

(iv) Nullstellen:

$$g(x) = 3x^4 + 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3(3x+4) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0\,(dreifach \Rightarrow Wendepunkt) \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{4}{3}$$

(v) Schnittpunkt mit der y-Achse: $g(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_y(0 \mid 0)$

(vi) Extremwerte:

$$g'(x) = 12x^3 + 12x^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -1$$
$$g''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad kein\ Extrempunkt\ (vgl.\ Nullstelle)$$
$$g''(1) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(-1 \mid -1)$$

(vii) Wendepunkte:

$$g''(x) = 36x^2 + 24x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 12x(3x+2) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$
$$g''' = (0) = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(0 \mid 0)$$
$$g''' = \left(-\frac{2}{3}\right) = -24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(-\frac{2}{3} \,\middle|\, -\frac{16}{27}\right)$$

(viii) Monotonieintervalle:

$$I_1 = \left]-\infty\,;-1\right[\quad \text{monoton fallend}$$
$$I_2 = \left]-1\,;\infty\right[\quad \text{monoton steigend}$$

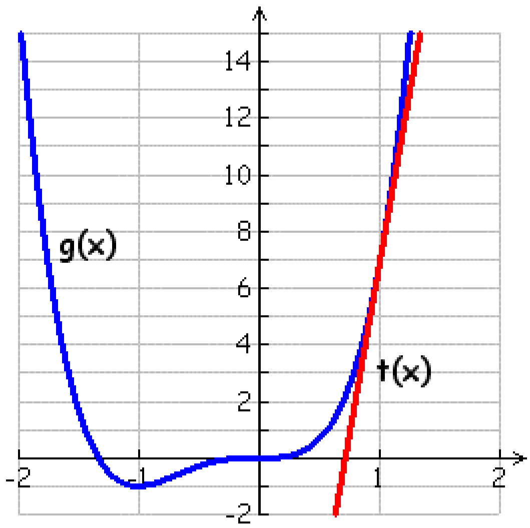
(ix) Tangente in $x_0 = 1$:

$$t(x) = mx + b \quad \Rightarrow \quad 7 = 24 \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = -17$$
$$\Rightarrow \quad t(x) = 24 \cdot x - 17$$

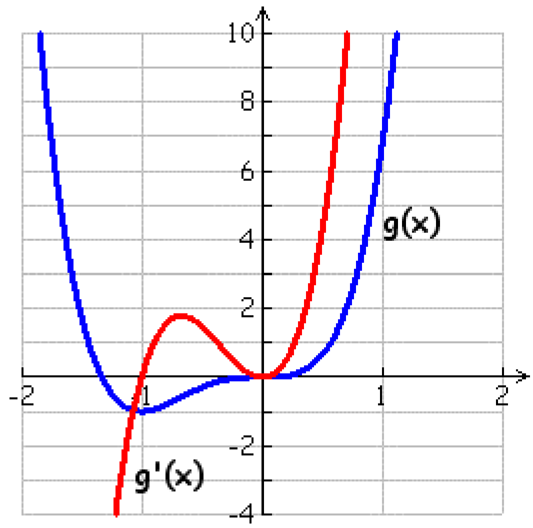
(x) Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty \quad und \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$$

(xi) Graph der Funktion und die Tangente:



Funktion und Tangente



Funktion und erste Ableitung