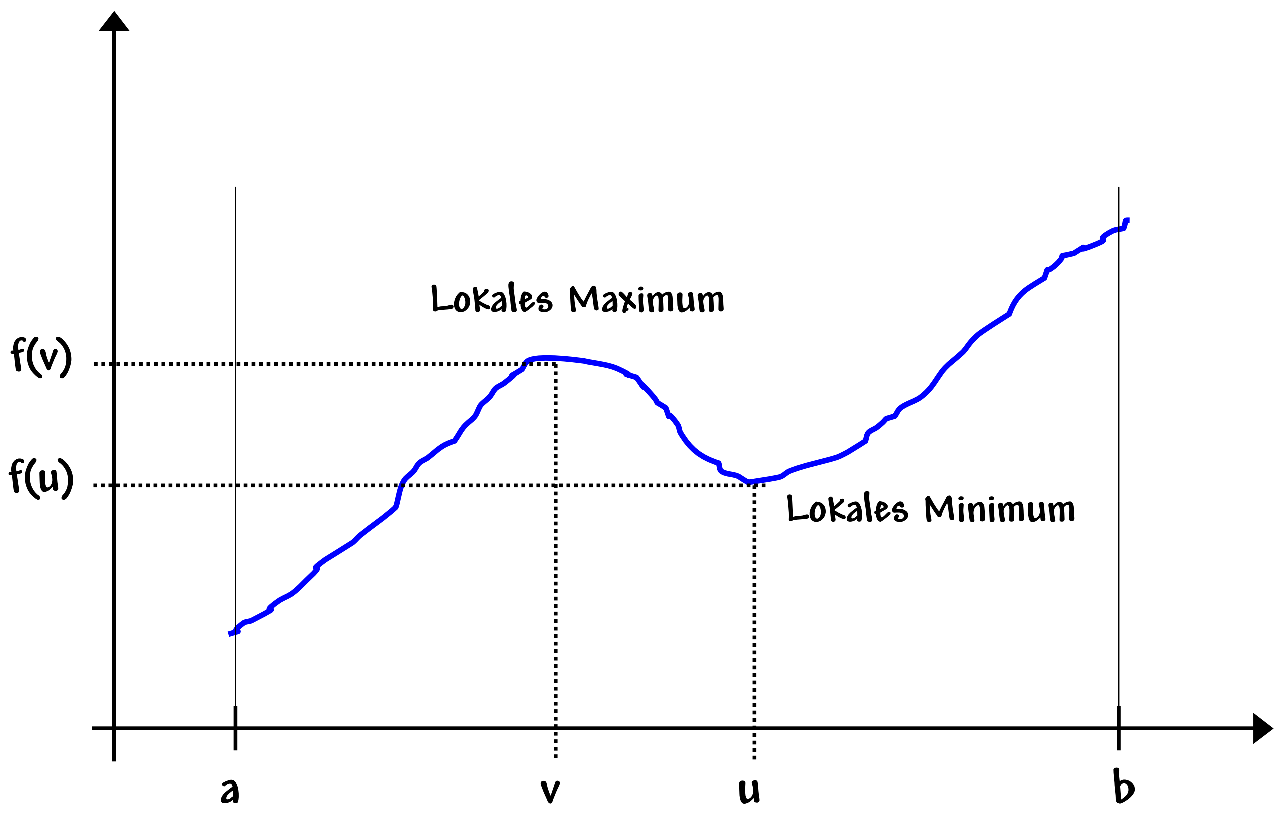
Satz vom Maximum & Minimum

(Extremwertsatz)

Ist die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a;b]$ stetig, dann gibt es Stellen u bzw. $v \in [a;b]$ mit $f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall\, x \in [a;b]$.

Man sagt, die Funktion $f(x)$ nimmt in $[a;b]$ einen *größten* ($f(v)$ = *Maximum*) und einen *kleinsten* ($f(u)$ = *Minimum*) Funktionswert an.

Wird das Max. oder Min. am Rand des Intervalls angenommen, so spricht man einem *Randmaximum* oder *Randminimum*.

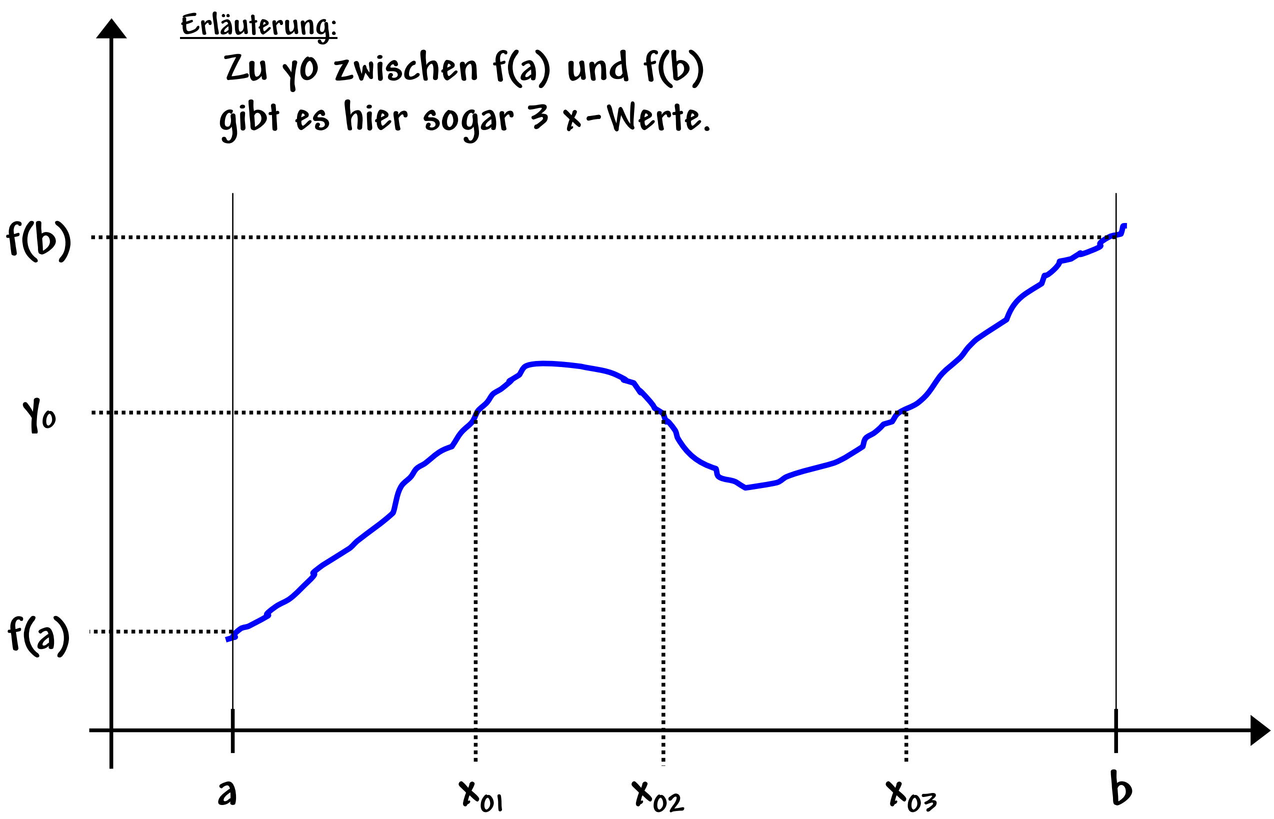


Zwischenwertsatz

Ist die Funktion f(x) auf dem Intervall [a;b] stetig,

so gibt es zu jedem Wert y_0 zwischen f(a) und f(b)

mindestens eine Stelle
$x_0 \in [a;b]$ mit $f(x_0) = y_0$.



Nullstellensatz

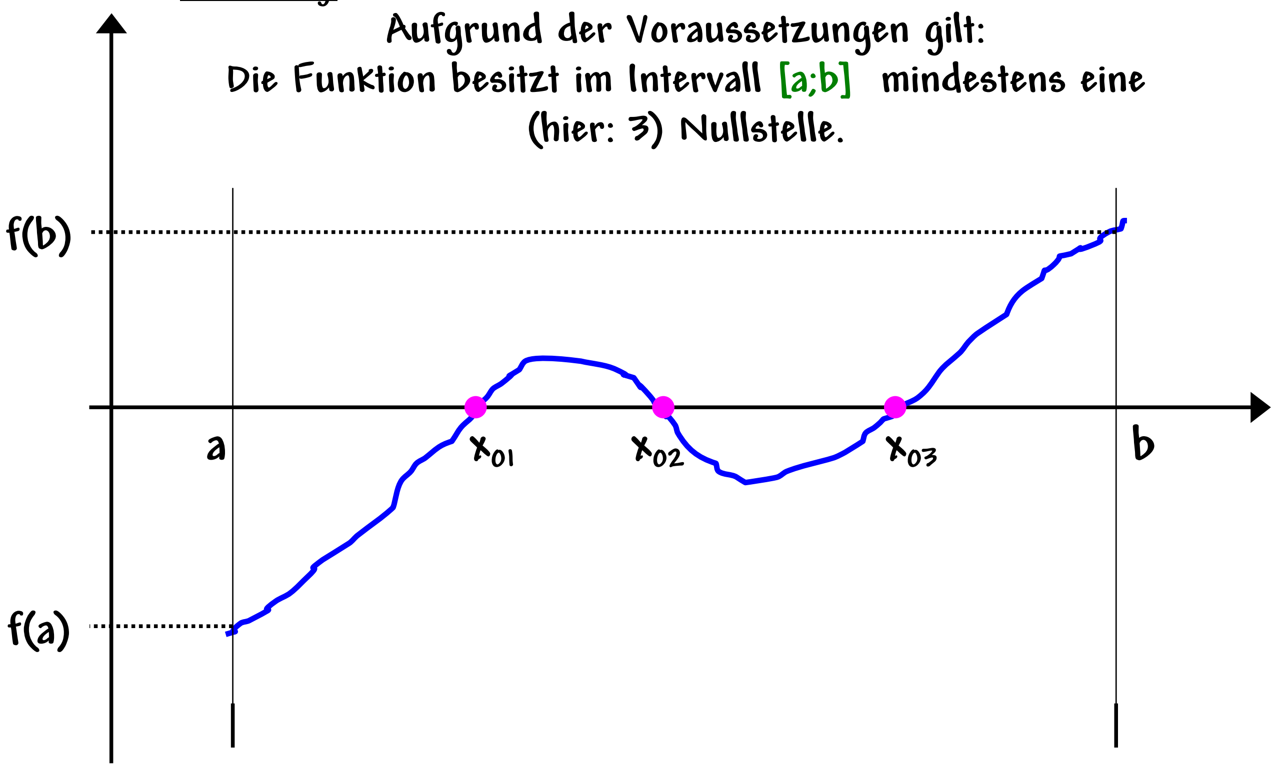
Ist die Funktion f(x) auf dem Intervall [a;b] stetig und haben f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen,

so gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in [a;b]$ mit $f(x_0) = 0$.

⇨ *d.h. f(x) besitzt mind. eine Nullstelle*

Erläuterung:

Aufgrund der Voraussetzungen gilt:
Die Funktion besitzt im Intervall [a;b] mindestens eine (hier: 3) Nullstelle.



Mittelwertsatz der Differentialrechnung

❶ Ist die Funktion f(x) auf dem Intervall [a;b] stetig und

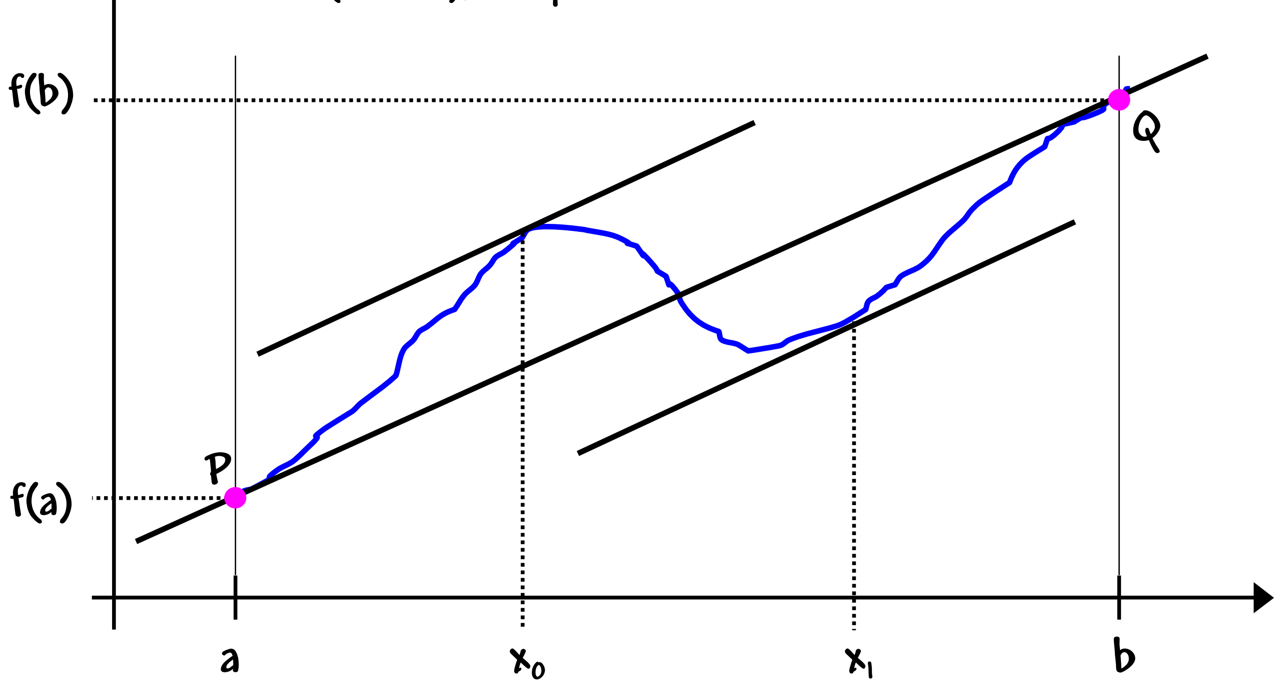
❷ differenzierbar auf]a;b[,

dann gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in\ ]a;b[$ für die gilt:

$$f^{I}(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

<u>Erläuterung:</u>

Zur Sekante durch die Punkte P und Q hat die Funktion f(x) mit $x_i \in\ ]a;b[$ mindestens an einer Stelle eine Tangente (hier: 2), die parallel zur Sekante verläuft.



Satz von Rolle

❶ Ist die Funktion f(x) auf dem Intervall [a;b] stetig,

❷ differenzierbar auf]a;b[und

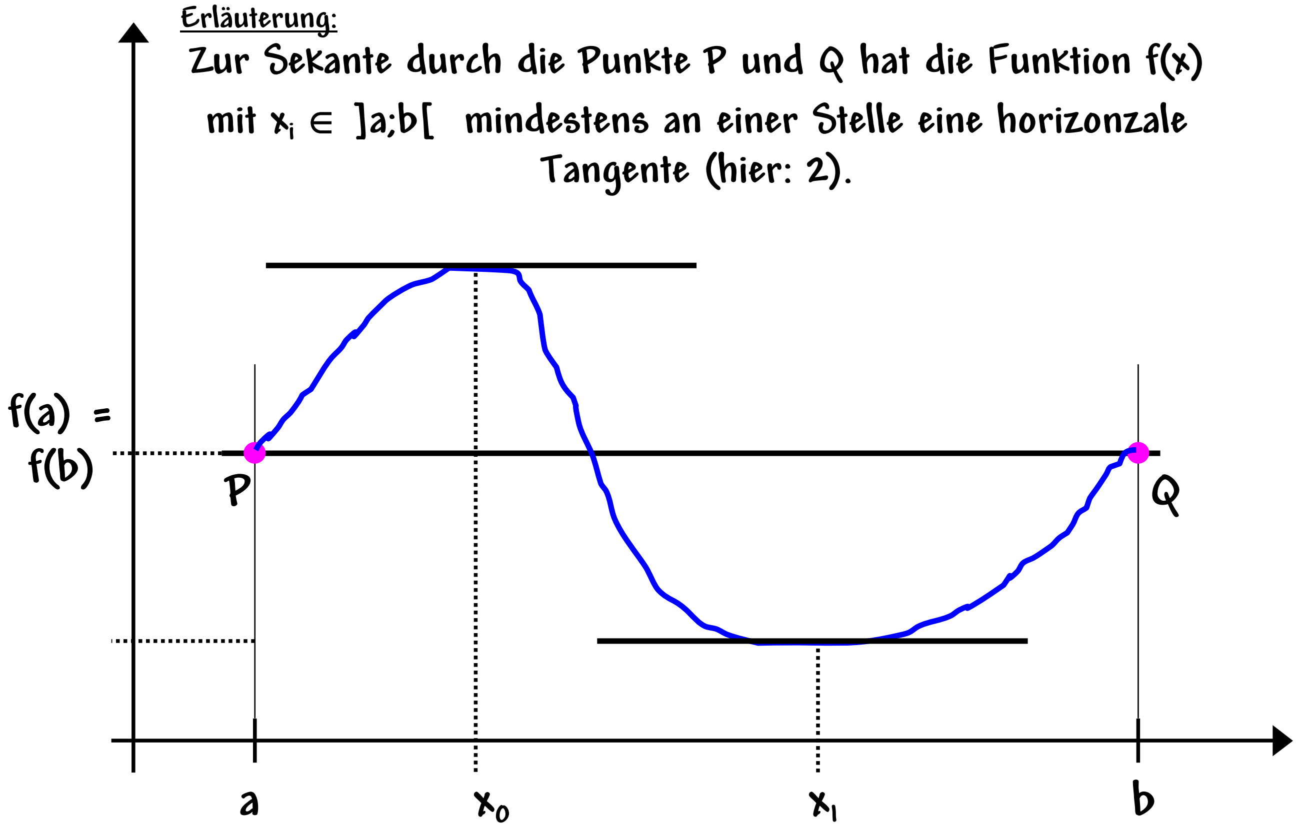
❸ gilt zudem $f(a) = f(b)$

dann gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in$]a;b[für die gilt:

$$\boxed{f^{I}(x_0) = 0}$$

Erläuterung:

Zur Sekante durch die Punkte P und Q hat die Funktion f(x) mit $x_i \in$]a;b[mindestens an einer Stelle eine horizonzale Tangente (hier: 2).



Monotoniesatz

❶ Ist die Funktion f(x) auf dem Intervall [a;b] stetig und

❷ differenzierbar auf]a;b[

dann ist f(x) auf [a;b]

streng monoton steigend

falls $f'(x) > 0 \;\; \forall \; x \in \;]a;b[$

streng monoton fallend

falls $f'(x) < 0 \;\; \forall \; x \in \;]a;b[$