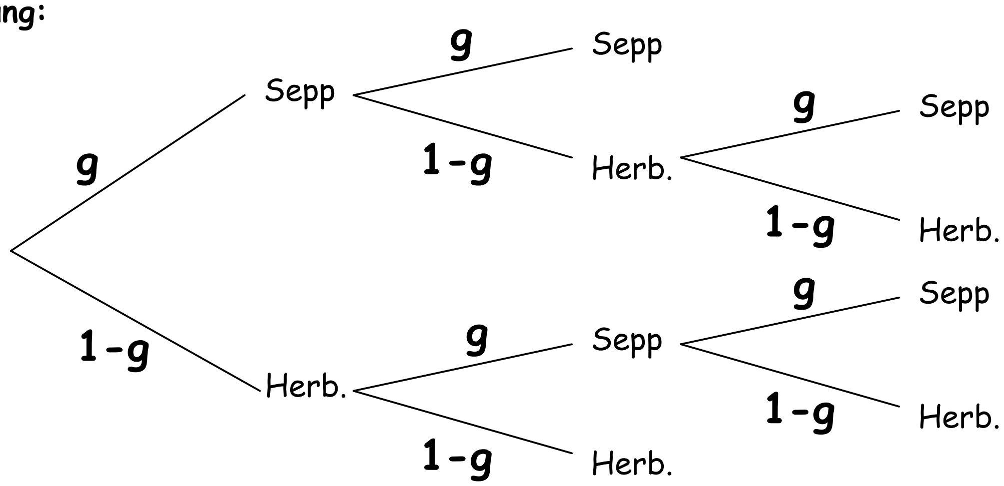
Übung zum Thema: Ergebnisraum

Sepp und Herbert sind leider dem Münz-Glücksspiel verfallen. Sepp gewinnt ein Spiel mit der Wahrscheinlichkeit von g.
Es gilt folgende Vereinbarung:

Sieger ist, wer zuerst zwei von drei Spielen gewinnt, d.h. es müssen max. drei Spiele durchgeführt werden.

a) Bilden Sie das zugehörige Baumdiagramm.

Lösung:



b) Beschreiben Sie die Ergebnismenge mit S (Sepp gewinnt) und H (Herbert gewinnt) und deren Mächtigkeit.

Lösung:

$$\Omega = \{SS; SHS; SHH; HSS; HSH; HH\}$$

$$|\Omega| = 6$$

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse

(i) A = „Sepp gewinnt“ (ii) B = „Herbert gewinnt“.

Lösung:

$$P(A) = g \cdot g + g \cdot (1-g) \cdot g + (1-g) \cdot g \cdot g = g^2 + 2g^2 \cdot (1-g) = 3g^2 - 2g^3$$

$$P(B) = (1-g) \cdot (1-g) + (1-g) \cdot g \cdot (1-g) + g \cdot (1-g) \cdot (1-g) = (1-g)^2 + 2g \cdot (1-g)^2$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \left[g^2 + 2g^2 \cdot (1-g)\right] = 1 - 3g^2 + 2g^3$$

d) Beweisen Sie folgende wahre Behauptung: p(A) + p(B) = 1

Lösung:

$$P(A)+P(B)=\left(3g^2-2g^3\right)+\left(1-3g^2+2g^3\right)=1$$

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Sepp, wenn er der Wert für g = 0,6 beträgt?

Lösung:

$$P(A)=3\cdot 0,6^2-2\cdot 0,6^3=0,648$$

f) Zeigen Sie, dass Sepps Gewinnwahrscheinlichkeit mit Hilfe folgender Funktion darstellbar ist: $p(g) = g^2 + 2g^2 (1 - g)$ mit $g \in [\,0\,;\,1\,]$

Wo hat die Funktion

(i) ihre Extremwerte? (ii) ihren Wendepunkt?

Lösung:

$$P(g)=g^2+2g^2\cdot(1-g)=3g^2-2g^3$$

$$Extremwert:$$

$$P'(g)=6g-6g^2\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad g_1=0 \quad\wedge\quad g_2=1$$

$$P''(g)=6-12g$$

$$\Rightarrow\quad P''(0)=6>0 \quad\rightarrow\quad Min(0\mid 0)$$

$$\Rightarrow\quad P''(1)=-6<0 \quad\rightarrow\quad Max(1\mid 1)$$

$$Wendepunkt:$$

$$P''(g)=6-12g\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad g_1=\frac{1}{2}$$

$$P'''(g)=-12$$

$$\Rightarrow\quad P'''\left(\frac{1}{2}\right)=-12\neq 0 \quad\rightarrow\quad W\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$$

g) Zeigen Sie, dass durch $d(g) = g^3 + 3g^3(1-g) + 6g^3(1-g)^2$ mit $g \in [0;1]$ die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg von Sepp gegeben ist, wenn nun **auf drei Gewinnspiele** gespielt wird.

Es gilt folgende Vereinbarung:

Sieger ist, wer zuerst drei von fünf Spielen gewinnt, d.h. es müssen max. fünf Spiele durchgeführt werden.

Lösung:

$$A(\text{"Sepp gewinnt"}) = \{SSS; HSSS; SHSS; SSHS; HHSSS$$
$$SHHSS; SSHHS; SHSHS; HSSHS; HSHSS\}$$

$$|A| = 10$$

$$\begin{aligned} P(A) &= g \cdot g \cdot g \\ &\quad + (1-g) \cdot g \cdot g \cdot g + g \cdot (1-g) \cdot g \cdot g + g \cdot g \cdot (1-g) \cdot g \\ &\quad + (1-g) \cdot (1-g) \cdot g \cdot g \cdot g + g \cdot (1-g) \cdot (1-g) \cdot g \cdot g \\ &\quad + g \cdot g \cdot (1-g) \cdot (1-g) \cdot g + g \cdot (1-g) \cdot g \cdot (1-g) \cdot g \\ &\quad + (1-g) \cdot g \cdot g \cdot (1-g) \cdot g + (1-g) \cdot g \cdot (1-g) \cdot g \cdot g \\ &= g^3 + 3g^3 \cdot (1-g) + 6g^3 \cdot (1-g)^2 \end{aligned}$$