Wachstumsprozesse

Exponentielles Wachstum

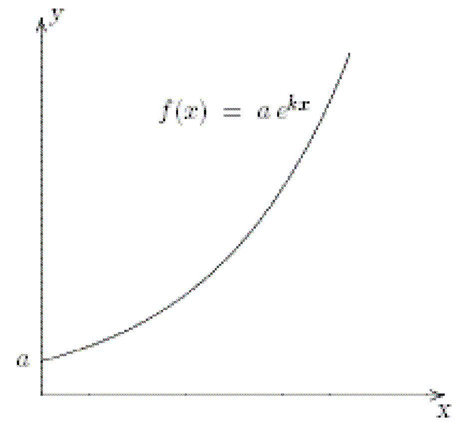
DGL $\quad f'(x) = k \cdot f(x)$

Differenzengleichung

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = k \cdot y_n$$

$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n \cdot \Delta x$$

Anfangswert: $\; y_0 = a$



Beschränktes Wachstum

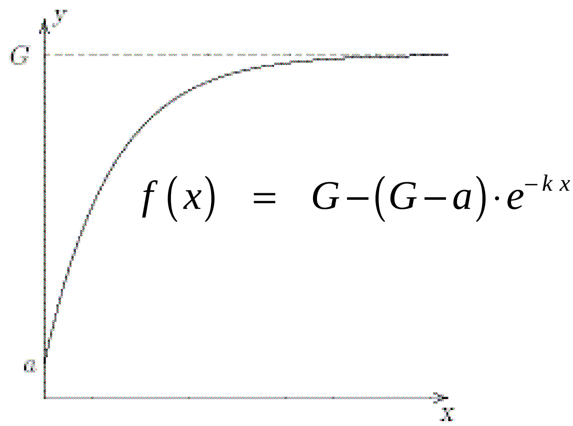
$$f'(x) = k \cdot (G - f(x))$$

Differenzengleichung

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = k \cdot (G - y_n)$$

$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot \Delta x$$

Der Zuwachs ist stets ein Bruchteil der Differenz zur Grenze G.



Logistisches Wachstum

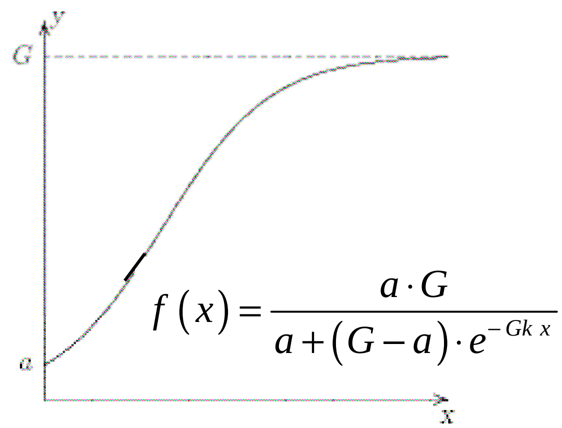
$$f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot y_n \cdot \Delta x$$

umgeformt: $\quad y_{n+1} = y_n \left(1 + k^* \cdot \frac{G - y_n}{G} \cdot \Delta x\right)$

mit $\quad k^* = k \cdot G$

Durch die Umformung ist das anfängliche (näherungsweise) exponentielle Wachstum mit der Wachstumsrate k^* zu erkennen. k^* wird mit einem Faktor multipliziert, der gegen null strebt.



Vergiftetes Wachstum

$$f'(x) \;=\; (g - s\,x)\cdot\; f(x)$$

Geburtenrate g

Sterberate $s\,x$ (proportional zur Zeit)

iterativ:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} \;=\; y_n\,(g - s\,x_n)$$

$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} \;=\; y_n + y_n\,(g - s\,x_n)\cdot \Delta x$$

$$\text{mit} \quad x_n \;=\; n \cdot \Delta x$$

Anfangswert: $y_0 = a$

Beim exponentiellen Wachstum sind Geburten- und Sterberate konstant.

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n \;&=\; g \cdot y_n - s \cdot y_n \qquad (\Delta x = 1) \\ &=\; (g - s)\cdot y_n \;=\; k \cdot y_n \end{aligned}$$